

---

シリーズ:

Linus Schrage シカゴ大学ビジネス・スクール教授の英知に学ぶ  
社会人のための問題解決学

DEA による問題の発見と解決

---

何かビジネスや研究で解決したい問題があるとき、Linus Schrage シカゴ大学ビジネス・スクール元教授が、一生かけて整理した種々の産業分野で研究開発された成果を数理計画法のサンプル(雛型)・モデルにまとめたものを調べ、該当するものがないか調べて、利用することが最も知的生産性を高める。

もし見つければ、数理計画法ソフトの LINGO や What's Best! でそのサンプルを流して、概略を理解し、自分の問題に修正して解決するのが最善かつ最短で成果を得る。彼は、シカゴ大学で LINDO Systems Inc. を立ち上げ、早い時期から無償の数理計画法ソフトの評価版を提供してきた。企業や大学教育で、通りあえず評価版を入手し、本書で紹介する DEA の雛型モデルの解説を数日で理解することを目標にすればよい。その上で、膨大な無償で公開されている雛型モデルの中から、自分が解決したい問題を探することを勧める。そして、それを PC で動かしてみれば基本を理解すれば、実際に自分が解決したい問題に簡単に拡張し短期間で解決できる。これほど、「知的生産性」を上げる方法はないであろう。

私は大学卒業後に、「統計的判別分析は現実の問題に適用するのに問題がある」と考えた。彼の知恵に学んで、2016 年末に「新しい判別理論」を完成させ、“New Theory of Discriminant Analysis after R. Fisher (Springer, 2016)” を出版した。その応用として 30 年以上統計的に決着できなかった「癌の遺伝子解析」を解決し Amazon から “From Cancer Gene Analysis to Cancer Gene Diagnosis (Shinmura, 2017)” を出版した。

また、LINGO の DEA の雛型モデルを修正し、「評価の可視化の実践的な手法」を確立し、誰もが容易に問題を発見し解決策を見つけて、多くの組織の改革と改善活動に役立つ方法を本書で紹介する。

読者も私に習って、簡単に解決できるものは解決し、知的生産性を上げることを勧めたい。その上で、未解決の新しいフロンティアに挑戦すべきである。

本シリーズは、Schrage 氏に対する感謝とオマージュで企画した。今回 Amazon から、学生でも購入しやすい 200 円から 300 円前後で 200 頁程度の本をシリーズとして出すことにした。LINDO 製品の顧客は LINDO Japan の HP (<http://www.lindo.jp>) に会員登録すれば、本シリーズと関係のある英語のマニュアル等の PDF を無料で利用できる。

## まえがき

筆者は 30 年ほど前から、「データの科学」と「モデルの科学」を新しい一般教養として多くの社会人や学生が習得することを提案してきた。分析したい対象がデータで表される場合は使いやすく高機能な統計ソフトでデータを分析し問題を解決することで、統計を利用した高度で実践的な問題解決の知識と技術が獲得できると主張してきた。そして、分析したい対象がデータでなく数式で記述でき、その解や、最大値や最小値を求める問題であれば、使いやすく高機能な数理計画法ソフトを用いて数式で表されたモデルを分析し問題を解決することで数理計画法を利用した高度で実践的な問題解決の知識と技術が獲得できると主張してきた。

本書で紹介する**包絡分析法 (DEA : Data Envelopment Analysis)**は、企業や公的機関や、各種機械や、公的な意思決定等を客観的かつ可視的に公平に評価する手法である。チャーンズ・クーパー・ローズ(Charnes, Cooper and Rhodes, 1973)が開発したので**CCR モデル**という。チャーンズは、ノーベル経済学賞を受賞している。クーパーは、米国マネジメント・サイエンス学会<sup>1</sup>の父と呼ばれ、Mr. **LP** と呼ばれ、米国会計学会の会長も務めた。その後、DEA 研究者による多くの精緻なモデルが開発されている (Charnes, Cooper, Lewin and Seiford, 1994) が、これらは研究者向けであり実務家が利用するのに適していない。

筆者は、多くの人が実際に役立っているのは最初に開発された基本モデルである CCR モデルを十分使いこなすことで十分だと考える。CCR モデルで効率値が 1 になる効率的な評価対象と 1 未満の非効率な評価対象に分かれる。そして非効率な評価対象は、どの効率的な評価対象を手本 (**改善目標**) とすれば良いかが分かる。Shimura (2012) が開発した DEA クラスタはこれを客観的に示す (**改善点 2**)。統計のクラスタ分析と異なり、各評価対象の重みで分析対象の**クロス効率値**が分かるが、クロス効率値から DEA クラスタは一意に決定される。しかし、この結果から CCR モデルに欠点が幾つかあることに気づく。そこでその欠点を補う **Inverted DEA モデル**(山田、松井、杉山、1994;杉山、2010)を利用して、CCR モデルの複数の効率的とされた評価対象から一番効率的な評価対象を決める (**改善点 3**)。それを改善目標として、他の分析対象がどの変数をどれだけ改善するかを示す「**1 入力固定改善法**」を開発した (**改善点 4**)。最後に、CCR と Inverted DEA から分析対象を 4 群に分け、 $p \times q$  個の比を作成し一元配置の分散分析で検討する (**改善点 5**)。比は分かりやすいが、他の比とは総合化できない。しかし DEA 法で総合的な知見が得られているので、その枠内で分かり易い比を検討すれば、間違いなく各変数と分析対象の問題点がより明確になる。

以上の過程を踏めば、実務家や学生が身の回りにある実際の問題解決が容易に行える。このために、DEA の雛型モデルを改良した汎用 DEA モデル (**改善点 1**) を用いた結果で解説する。読

---

<sup>1</sup> 第 2 次世界大戦中、ノーベル物理学賞を受けたラザフォードらによって、英国でドイツの U ボートの被害を少なくするための戦略研究が行われ、英国では戦後オペレーションズ・リサーチ (OR) という学問になった。米国では、企業経営を意識したのがマネジメント・サイエンス学会と呼ばれている。

者は、一通り本書を読んだ後は、汎用 DEA モデルを用いて是非自分で身の回りの問題解決を試みてほしい。

CCR モデルも Inverted DEA モデルも、高校数学で習う「**領域の最大/最小問題**」で扱う線形計画法 (LP: Linear Programming) で定式化できる。イメージ的には、 $p$  個の入力変数 (**説明変数**) で、 $q$  個の複数の成果 (**目的変数**) を評価する回帰分析 (正しくは正準相関分析) と目的が似た**問題解決法**である。しかし、DEA の方がデータに潜む問題点発見が容易である。分析対象を説明変数と目的変数の加重和とした総合化した入力と出力の比で表して**効率値を 1 に最大化する CCR モデル**と、**非効率値を 1 に最小化し効率的な評価対象を 1 以上に制限なしに大きくする Inverted DEA**の結果を用いて、両効率値が最大値と最小値をとる対照的な分析対象に注目して比較し問題を発見し、それを前提に統計分析で分析をさらに深めることができる。すなわち、非効率な分析対象は、効率的な評価対象を手本にして改善すればよい。

分かりやすい手法であり、大学でゼミや授業で取り上げ、学生が就職したい産業の代表的な企業の評価等に用いれば就活にも効果的である。学生が社会人になって、是非自分の周りにある評価すべきテーマを実際に分析することを期待している。

研究者は、例えば今後の課題として国や県のレベルで市町村の介護保険施設等の評価に用いれば、あらゆる面で日本に巣くう非効率性を改善できるであろう。この主張は、2012 年に筆者の成蹊大学 3 年生のゼミ生が行った東京都 23 区の区立図書館の指導を行って感じたことである。1986 年に効率値が 0.2 以下と最も非効率であった千代田区立図書館が、25 年間予算が 4% しか増えていないのに 2011 年に様々な取り組みで効率値が 1 になった。このことから、区立図書館レベルの事業規模であれば、個人の意欲やアイデアで比較的改革改善が容易でないかと考えている。DEA による評価で効率的である評価対象と、非効率な評価対象を、短絡的に評価してはいけない。どこを改善するかを関係者で話し合う、あるいは結果に納得できない場合は入力と出力の変数に問題ないかを議論して、分析と検討を繰り返すべきである。**Plan-Do-See サイクル**で考えれば、テーマとそれに合った入出力変数を決める (**Plan**)。そして DEA で分析する (**Do**)。効率的な分析対象と非効率な分析対象を比較し、改善方法を検討する。あるいは他に重要な変数がないかを検討する (**See**)。すなわち、DEA はビジネスの改革改善活動に最善な手法である。

筆者は、**2011 年までは「データの科学」**で各自テーマを決めて統計分析を指導してきた。しかし学生が決められた手法の分析結果の解釈だけで、それ以上の問題発見と改善案を考えることまでいかなかった。

2012 年の 4 年ゼミと 3 年ゼミの女子学生が東京都 27 市の市立図書館 (2 章とテーマが同じなので割愛) と 23 区の区立図書館 (2 章) の分析を行ってくれた。マスコミでは公的図書館が蕨屋等に外部委託していることを取り上げて有名であるが、後藤田 (公務員) 改革で一番成果を上げたのは、東京都 23 区の区立図書館であると考えられる。この他、筆者は治療前の患者の状態を入力とし、治療後の予後の良さを表す指標を出力とすれば、患者ごとの治療効果が評価できるのではないかと、2017 年 8 月から研究をスタートしている。

DEA の一番簡単で分かりやすい説明は、企業の課や部を**分析対象**とする場合である。従業員数に対する利益の比で**分析対象**の課や部を評価することは、日本の企業でよく行われている。筆者は新規事業を立ち上げる使命を課せながら、毎月の部課長会議で、横並びで従業員当たりの売り上げや利益率が取り上げられることに馴染めず、大学に移籍した。単純な比の評価には問題がある。一番大きな問題は、複数の比が統一的に評価できないことである。DEA 法は  $p$  個の入力と  $q$  個の成果を表す出力に重みをかけ、この総合化された比を最大化あるいは最小化して評価する点に特徴がある。その上で、評価する対象ごとに最適な重みを求める。そしてこの重みを全ての分析対象に適用しその値を 1 以下になるように制限する。これで自分に最適な重みを用いたのに 1 になるものと、1 以下になるものに別れる点である。1 以下になるのは、自分に最適な重みであるにもかかわらず、他の分析対象が 1 になり、自分が 1 になることが妨げられたことを示す。評価対象の効率値が 1 になるものを **DEA 効率的**という。分析対象全てが、この DEA 効率的になる評価対象を包み込むことから包絡分析と呼ばれている。

非効率な評価対象は、効率値が 1 になることを妨げた効率的な評価対象を目標に改革改善を図ればよい。しかし、CCR モデルは複数の効率値が 1 になる評価対象が現れる。 $(p+q)$  を増やしていくと DEA クラスタも増えていき、各クラスタに含まれる分析対象が 1 個になる傾向がある。そこで、Inverted DEA を用いて分析対象全体で 1 番良い評価対象 (**最善の対象**) を決めて、それと比較して他の分析対象がどこを改善すれば良いかを改革改善の第一歩とする必要がある。

この目的で、「**一入力固定改善法**」を開発した。非効率な分析対象は最善の対象に対してどの入力や出力が劣っているかが簡単に分かる。これで、「何がその分析対象にとって問題か？」が労せず分かる点である。何が問題かが分かれば、その理由を調べることは比較的容易である。その成果を踏まえて、 **$p$  入力  $q$  出力の場合、 $p \cdot q$  個の比がデータとして作成できる**。すなわち、元のデータに、クロス効率値や比といったデータが簡単に付け加わる。これらは、**一元配置の分散分析**、主成分分析 (PCA: Principal Component Analysis)、**クラスタ分析**等で分析すれば、統計分析の幅が確実に広がり、また DEA 法で得られた 2 つの効率値を目印にして解釈が容易である。個々の比の分析は、「何が問題かが分からなければ利用するのが難しい」が、問題点が明確であれば、多くの比も間違わずに解釈できる。

統計や数理計画法では、使いやすく高機能なソフトがあるので、学生や社会人が実際の問題を容易に解決できる教育革命の一つの切り口になると確信している。また社会人が、簡単に身の回りの問題を分析し、データと分析結果に基づく日本社会に欠けた問題解決が行える。分析対象全体で、お互い切磋琢磨し、最終的には全対象が CCR モデルで 1 になるような改革改善のためのツールになればよいと考えている。

本書の利用の仕方として参考までに筆者のお勧めを紹介する。数理計画法が初めての読者は、まず **6 章**を最初に読むのが良いでしょう。その後で、1 章から 5 章までを時間をかけず通読してください。引っ掛かるところや疑問のところは、マーカーで印をつけて置いたらいいでしょう。

その後で、ぜひLINGOやJMPやExcelを用いて本書の内容を逐次確認してください。ExcelはPCユーザーであれば、ほぼ全ての人が所有していて問題はないと考える。JMPは少し高額ですが、Googleで「JMP」と検索するか「Research Gate Shuichi Shinmura」と検索すると私の「世界の研究者DBのResearch Gate」のHPが出ます。その横にJMPの広告が出ています。これをクリックすれば無償で1か月間利用できるHPが現れる。私はこれで収入は得ていません。JMPの全機能を1か月使えるが、期間は短いので注意してください。拙著『JMP活用 統計学とおき勉強法（講談社ブルーバックス、2004）』に評価版を添付しています。この評価版はWindows XP対応で、JMPはWindows 10のサポートはしていません。2017年現在のWindows10では稼働しますが、今後の保証はできません。評価版なので40件のデータしか対応していません。幸いにも、本書で分析しているデータは全て40件以下なので問題はありません。LINGOは、米国のLINDO Systems Inc.のHP (<http://LINDO.COM>)から評価版をダウンロードできます。LINDO JapanのHPではマニュアル等が無償でダウンロードできます。本書の6章で紹介したLINGOのモデルは全て評価版で分析できます(<http://WWW.LINDO.JP>)。しかし、DEAと数独の分析モデルが、評価版の制限を超えて大きいのでそのままでは実行できません。

企業の方は、評価版で機能を確認したうえで、企業で購入して利用することが良いでしょう。あなたの人件費の1週間程度の費用なので、あれやこれやで無駄な時間を費やすより安価です。大学の場合は、100台のサイトライセンスが格安に設定されています。もし予算がすぐ取れない場合は、例えば東京都の23区立図書館の分析を、評価対象を千代田区から世田谷区の23区を連続的に分析するのではなく、中央区等の1つの区を23区の分析対象で評価するように、本書のモデルを修正して下さい。このモデルは簡単にできることを確認しています。その後で、作成されたモデルを、千代田区から世田谷区の23区の評価対象を逐次23回繰り返し最適化し、DEAモデルを23区別のモデルとして扱うことにすれば、無償の評価版で利用できる。

また、これらが準備できない読者に、Excelでどう考えるかを説明をした。最低限、Excelで確認するだけで、単に本書を通読して得られる理解をより深くできると考えている。統計や数理計画法といった学問は、使いやすく高機能なソフトを用いて理解すれば現実の問題がたやすく解決できる。これによって自身の知的生産性を上げることを試みてほしい。絶えず知的生産性を上げることを追求し、無駄な忙しさから解放され充実された人生を送ってください。

2017年9月

新村秀一（成蹊大学 名誉教授）

## 目次

### 第1章 公平で客観的な評価の科学による問題解決学 (DEA 法)

#### 1.1 評価の可視化を行う DEA 法

##### 1.1.1 良いテーマと集めやすいデータで実行してみる事が成功のポイント

##### 1.1.2 CCR モデル

##### 1.1.3 東京都 23 区の区立図書館の評価

#### 1.2 Inverted DEA

#### 1.3 LINGO の汎用モデル

#### 1.4 Inverted DEA の分析結果

#### 1.5 1入力固定改善法

### 第2章 1986 年 (昭和 61 年) と 2011 年 (平成 23 年) の東京都 23 区の公立図書館の比較評価

#### 2.1 はじめに

#### 2.2 分析に用いるデータ

#### 2.3 2011 年と 1986 年の比較

##### 2.3.1 1986 年の 3 入力 2 出力モデル

##### 2.3.2 1入力固定改善法

##### 2.3.3 2011 年の 3 入力 2 出力モデル

##### 2.3.4 1986 年と 2011 年の 3 入力 2 出力モデル

#### 2.4 1986 年と 2011 年の 5 入力 2 出力モデルの検討

##### 2.4.1 1986 年の 5 入力 2 出力モデルの検討

##### 2.4.2 2011 年の 5 入力 2 出力モデルの検討

##### 2.4.3 1986 と 2011 年の 5 入力 2 出力モデルの検討

##### 2.4.4 1 入力固定改善法

(1) 世田谷区の構成比で 1 入力固定改善法

(2) 目黒区の構成比で 1 入力固定改善法

#### 2.5 1986 年と 2011 年の比較評価

##### 2.5.1 統計分析

##### 2.5.2 資料による検討

(1) 足立区の場合

(2) 千代田区の場合

#### 2.6. まとめ

### 第3章 全国 26 空港の DEA 法による空港経営の効率性分析

#### 3.1 モデル1の分析結果

(1) 効率値の検討

(2) DEAクラスタ

### 3.2 新しい変数の追加(モデル2)

- (1) 両効率値
- (2) DEAクラスター

### 3.3 出力変数を追加(モデル3)

- (1) 両効率値
- (2) DEAクラスター

### 3.4 モデル4

- (1) 初めてのヘルプ・メッセージ
- (2) 両効率値

### 3.5 統計手法を使った分析

### 3.6 まとめ

## 第4章 鉄道18社の分析

### 4.1 鉄道会社18社のDEA法による分析

### 4.2 クロス効率値とDEAクラスター

### 4.3 重みに関して

### 4.4 1入力固定改善法

### 4.5 統計分析によるDEA法分析の検討

- (1) 良い統計ソフトとは
- (2) DEA効率値
- (3) クラスター分析
- (4) PCA
- (5) 回帰分析

## 第5章 日本の10電力の2010年と2012年度の比較

### 5.1 データと客観的な事実に基づく問題解決とは

### 5.2 2010年の分析

- (1) 効率値から総括原価方式を読み解く
- (2) DEAクラスター

### 5.2 2012年度の分析

- (1) 両効率値の分析
- (2) DEAクラスター

### 5.3 両年度を同時に20社として分析

### 5.4 統計分析

- (1) 2010年のPCA
- (2) 2012年のPCA
- (3) 20社の分析

### 5.5 まとめ

## 第 6 章 「データの科学」と「モデルの科学」

### 6.1 「データの科学」と「モデルの科学」

### 6.2 関数の最大/最小と極大/極小

#### 6.2.1 関数の最大値と最小値

- (1) 実行可能解ありと非有界の場合
- (2) 実行可能解なしの場合
- (3) 2 次関数の最大値
- (4) 局所最適解と大域的最適解
- (5) 統計手法で解が一つしかでない幸せ?
- (6) チャレンジングな問題

### 6.3 現実問題への利用

#### 6.3.1 ローンの返済

#### 6.3.2 領域の最大/最小問題とプロダクト・ミックス

#### 6.3.3 配合計画 (Blending)

#### 6.3.4 ポートフォリオ・モデルと QP

#### 6.3.5 数独と IP

### 6.4 統計と数理計画法

#### 6.4.1 重回帰分析

- (1) 最小二乗法
- (2) 重回帰分析と判別分析の違い
- (3) LAV (Least Absolute Value) 回帰分析
- (4)  $L_p$  ノルム回帰分析

#### **(5) 秘匿値の推定**

#### 6.4.2 判別分析

- (1) フィッシャーの線形判別関数
- (2) フィッシャーの後継者の過誤
- (3) 誤分類数と判別係数の関係
- (4) 判別関数の 5 つの問題

#### 6.4.3 数理計画法による判別分析

- (1) 数理計画法による判別関数の研究
- (2) SVM の QP による定式化
- (3) 最適線形判別関数
- (4) 30 年以上成功しなかったがんの遺伝子解析(問題 5)

### 6.5 雑型モデルで何ができるのか

新村秀一(2017). DEA による問題の発見と解決

参考文献

## 第1章 公平で客観的な評価の科学による問題解決学 (DEA 法)

$n$  件の  $(p+q)$  変数の分析対象がデータで表わされておれば、使いやすく高機能な統計ソフトで分析すれば、多くの人が容易に問題を解決できる「データの科学」を 40 年ほど前から提案してきた。そして、分析対象がデータでなく数式で表わされていれば、使いやすく高機能な数理計画法ソフトで利益や満足度の最大化や費用を最小化して問題を解決できる「モデルの科学」を提案してきた。これは筆者が日本に紹介普及してきた数多くのソフトウェア<sup>2</sup>の中で、企業人や研究者や学生に統計ソフトや数理計画法ソフトで「問題解決」すれば良いというメッセージである。

統計に関しては、大学卒業以来、2017 年 3 月に成蹊大学の特任教授を退任するまで、統計ソフトを使って多くの研究論文を出して自ら実践してきた。そして 2016 年末に、一生の研究テーマである「フィッシャー (Fisher) の提案した線形判別関数 (LDF: Linear Discriminant Function) は、医学診断、各種格付け、試験の可否判定等の多くの重要な分野に適用してはいけない」という研究目標を掲げて 46 年間試行錯誤してきたが、それを解決できた。そして誤分類数最小化 (MNM: Minimum Number of Misclassifications) 基準による最適化線形判別関数 (OLDF: Optimal Linear Discriminant Function) を数理計画法の中で計算時間がかかる整数計画法 (IP: Integer Programming) で開発し、その成果をまとめて 2016 年に『New Theory of Discriminant Analysis after R. Fisher』を Springer から出版した。数式がほとんどなく、豊富な実際のデータを用いた分析結果の説明で、世界で一読者を得ている。特に応用研究として 30 年以上世界中で研究され成功していなかった、癌の遺伝子解析にも初めて成功した。米国の主要な 6 研究グループが、癌症例と正常症例のマイクロアレイ (Microarray) データを分析し論文を出しているが、使用したデータが公開されている。筆者の分析結果は、Amazon の Kindle 版として 2007 年 6 月に『From Cancer Gene Analysis to Cancer Gene Diagnosis』として出版した (\$9.99)。6 論文と比較すれば、筆者の主張が正しいことが分かる。このテーマは、ビック・データの統計解析として最も注目された分野の一つであるが、既存の判別関数が全く役に立たなかった。このため、米国を代表する医学研究者が悪戯に研究者人生を無駄にしたのである。さぞかし無念であったろう。

しかし筆者の 2 番目の研究テーマである「評価の可視化手法としての DEA 法」は、2012 年以降の卒業演習ゼミで実施し指導学生が顕著な成果を得たという個人評価だけである。退職後の研究テーマを「癌の遺伝子診断」を第一目標とし、本書でもって「評価の可視化手法としての DEA 法」の普及に尽力したいという第 2 目標を設定した。本書は、筆者が開発発展させてきた「実践的な DEA 法を読者に紹介」し、多くの人の問題解決に役立つことを願っている。DEA 法は、 $p$  個の入力と  $q$  個の出力変数を持つ  $n$  個の分析対象の中で、どの評価対象<sup>3</sup>が最も効率的、あるいは

<sup>2</sup> 統計ソフトの SAS, JMP, SPSS, Statistica, 数理計画法ソフトの LINDO, LINGO, What'sBest!, LINDO/API, NAG 数値計算ライブラリー, 数学ソフトの Speakeasy, 第 2 世代の AI ソフトの Exsys, リアルタイム OS の VxWorks 等。

<sup>3</sup> 本書では、 $n * (p+q)$  の  $n$  件の分析したい対象を分析対象と呼ぶ。その中の評価する 1 件を評価対象と呼び、一番評価対象に適した重みで効率値を求める。ただし CCR モデルでは、その重みを分析対象のすべ

非効率かを判定する手法である。q=1 であれば重回帰分析や判別分析の利用を思いつく。q が複数の場合は、統計手法の正準相関よりはるかに使いやすく分かりやすい結果が得られる。

このため、多くの統計手法と異なり学生であっても「何が問題か？」を容易に理解し、その理由を調べ、DEA 法が提示する結果が正しいか否かを各種統計手法で事後解析し検証できる。このため、統計教育とデータ解析の技能向上にも役に立つ。そして、曖昧ではっきりしないこれまでの評価法を、誰もが理解し納得できる評価の可視化を通して、「非効率と判定されればどこを改善すべきかホワイトカラーの改善活動の手法」として定着させることを最終目標にしたい。

## 1.1 評価の可視化を行う DEA 法

### 1.1.1 良いテーマと集めやすいデータで実行してみる事が成功のポイント

DEA 法の意味は、優れて効率的な評価対象で、その他の分析対象を包み込むことから命名された。競合する企業、企業の事業部や課、百貨店等の複数の店舗、自治体の複数の介護施設や図書館等の各種事業体の意思決定主体 (DMU: Decision Making Unit) の効率性を評価する手法である。DEA 法や DMU 等、読者に抵抗感を与える専門用語が多いので、今後は DEA 法の方言はできるだけ避けて分かりやすい用語を用いる。DMU を分析対象と呼び、その中で評価に取り上げる分析対象の一つを評価対象と使い分ける。また、DEA 法の説明には抵抗があり、あくまで多くの読者が実際に評価を可視化し、その結果何が問題であるかを発見し、その問題点を統計手法で解決するプロセスを紹介したい。この点に関しては、筆者の成蹊大学経済学部の 2012 年以降の卒業研究ゼミの成功事例を取り上げる。実は、テーマの設定に関して次のような指導を行った。

- 1) インターネット上の DEA 法の研究論文を探し、自分に合ったテーマのヒントにする。
- 2) データはそれらの論文に用いられているものが公開されておれば、最初はそれらを用いて分析して、論文の内容を確認し、DEA 法で何をすべきか理解する。
- 3) しかし、最終的には自分なりの新規な視点を加味したデータで分析する。

以上の明確な目標を設定し、かなりの成果を得た。しかし、指導に従わず成功した学生も、データの収集に失敗した学生もいる。その多くは自分の興味で、企業等の組織評価でない種牡馬や携帯等のテーマを選んで、データ集めに失敗したためである。

例えば、

- 1) 携帯電話の評価を行おうとしたが、モデルチェンジが激しい。これに対して、PC 等のある時期のカタログ性能であればデータが集めやすいとアドバイスしたが、ドロップ・アウトした。
- 2) 競馬に興味があり、種牡馬 (おもば) の評価をしようとしたが、評価する馬が少なく、得られた結果は読者に公開できる内容でない。
- 3) 先行論文の内容の確認だけに終わったもの。

等である。

集めるデータは、1 入力 1 出力の変数で作られる比を考えればよい。筆者は企業人の時代、新規事業部とか技術開発部に所属し、他の営業部門とは異なった使命を与えられていた。しかし、

---

てに適用し 1 以下になるという制約を課している (クロス効率値と使い分けている)。Inverted DEA では 1 以上になるという制約を課している。ただし、評価対象を n 回変えて行っている。

月 1 度行われる部課長以上の全社会議が苦痛であった。売り上げや利益を報告するのであるが、部門間の比較は例えば売り上げ/人、利益/人等の比が資料として配布され、他の部門と比較される。この他にも、例えば前期の値に比べ伸びているか下がっているかも評価指標になる。単純な売り上げ/人、利益/人等は経営者に分かりやすいので好まれる。この場合、部や課の人員数を投入する経営資源と考え、売り上げや利益をその成果と考えている。これを 1 入力 1 出力モデルと言っている。単純な比の評価は分かりやすいが、実はあっけなく破たんする。即ち、人員に対して売り上げと利益の 2 出力の 1 入力 2 出力モデルを考えた場合でも、売り上げ/人が高いが利益/人が低い、売り上げ/人が低い利益/人が高い 2 つの場合だけを考えても、評価が定まらない。p\*q が 3 以上になれば、もうお手上げである。これにうまく対応したのが DEA 法である。即ち、複数の入力項目と出力項目に重みをかけ、総合化された入力と出力の比を効率値として最大化するわけである。しかも、この重みは評価対象ごとに最適なものをを用いるという点が、DEA 法を理解し活用するうえで、一番重要な視点である。

### 1.1.2 CCR モデル

DEA 法は 1978 年にテキサス大学のチャーンズ (Charnes)、クーパー (Cooper) と大学院生のローズ (Rhodes) によって提案されたので、CCR モデルと呼ばれている。チャーンズは、ノーベル経済学賞を受賞している。クーパーは、米国マネジメント・サイエンス学会の父と呼ばれ、Mr. 線形計画法と呼ばれ、米国会計学会の会長も務めた。彼らは、DEA 法はガソリンや電機で動くモータをイメージすればよいと説明している。入力であるガソリンに対し、モータの出力はロスが発生するので、出力/入力の比は 1 以下になる。1 に近いほど、エネルギー効率が良いモータと考えられる。この場合、1 入力 1 出力であるが、多くの場合は多入力多出力であることが多い。例えば組織の部の評価を考えてみよう。経営資源として部の人員数と経費を考え、成果として売り上げと利益を考える。人員や費用が多ければ、売り上げや利益もそれに応じて多くなることを期待している。一般的に、p 個の入力項目を  $x_1, \dots, x_p$  とし、q 個の出力項目を  $y_1, \dots, y_q$  とする。分析対象が経営の問題であれば、これらは一般的に負の値でないことを期待している。筆者の経験では、入力項目はできるだけ正の値、出力は少数個が負のものもあってもよいが、解釈に注意がいる。そして、n 個の分析対象があるとする。I 番目の分析対象(DMU<sub>i</sub>)の測定値を  $x_{1i}, \dots, x_{pi}$  とし、出力項目を  $y_{1i}, \dots, y_{qi}$  とする。この場合、h 番目の評価対象 DMU<sub>h</sub> の効率値は次の比になる。

$$DMU_h = (b_{1h} * y_{1h} + \dots + b_{qh} * y_{qh}) / (a_{1h} * x_{1h} + \dots + a_{ph} * x_{ph}) \quad \text{For } h \quad (1.1)$$

ここで、この比が 1 以下になるように重み ( $b_{1h}, \dots, b_{qh}$ ) と ( $a_{1h}, \dots, a_{ph}$ ) を決めてやればよい。重みを n 件の分析対象で一定(固定)にすれば、これまでの統計アプローチになる。DEA 法の特徴は、DMU<sub>h</sub> ごとにその効率値を最大になるように個別の重みを与える点である。そして、その重みを全ての分析対象にも適用し、その効率値を 1 以下にするという制約 (クロス効率値という) を課して式 (1.2) のモデルを考える。数理計画法に不慣れな読者は、ここで小休止して 6 章を読んで再開することも考えられる。(1.1) で、総合化された入力と出力の比を最大化しており、 $(b_{1h} * y_{1h} + \dots + b_{qh} * y_{qh}) / (a_{1h} * x_{1h} + \dots + a_{ph} * x_{ph})$  を **目的関数** という。2 番目の式は、分析対象

が 1 番目から n 番目までの入出力データに  $DMU_h$  に求めた最適な重みでクロス効率値を計算し、それを 1 以下に制約する。このような式を制約式と呼んでいる。制約式は  $(p+q)$  次元の空間の定義域であり、この定義域で目的関数を最大化している。「MIN=」に変更すれば、最小化する。数理計画法のアルゴリズムは、目的関数も制約式も入出力変数の一次式の場合を LP という。目的関数が 2 次式の場合、2 次計画法 (QP: Quadratic Programming) という。そして、最大値と最小値が求まる。これ以外は、非線形計画法 (NLP: Non Linear Programming) と呼ばれ、微分や偏微分で求まる極大値や極小値が求まる。真の最大値や最小値は、大域的探索の技術が完成した 2000 年以降にその機能を保証した LINGO (Schrage, L., 2006) 等で求められる。

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= (b_{1h} * y_{1h} + \dots + b_{qh} * y_{qh}) / (a_{1h} * x_{1h} + \dots + a_{ph} * x_{ph}) ; \text{ For } h \\ (b_{1h} * y_{1i} + \dots + b_{qh} * y_{qi}) / (a_{1h} * x_{1i} + \dots + a_{ph} * x_{pi}) &<= 1 \text{ for } i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.2) 式は NLP で解けるが、Mr. LP としては、これを式 (1.3) の LP モデルに置き換えた CCR モデルで解くことを提案した。

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= b_{1h} * y_{1h} + \dots + b_{qh} * y_{qh} ; & \text{ For } h \\ a_{1h} * x_{1h} + \dots + a_{ph} * x_{ph} &= 1 ; & \text{ For } h \\ (b_{1h} * y_{1i} + \dots + b_{qi} * y_{qi}) &<= (a_{1h} * x_{1i} + \dots + a_{ph} * x_{pi}) ; & \text{ for } i=1, \dots, n^4 \end{aligned} \quad (1.3)$$

ここで注意したいことは、各評価対象に対して上の LP モデルを n 回解く必要がある。すなわち、n 個の分析対象に対して n 個の異なった LP モデルを繰り返し解く必要がある。例えば、Excel のアドイン・ソルバーの数理計画法で解く場合、目的関数を一つの評価対象にして LP を解く。その後、目的関数を別の評価対象にかえて、制約式は同じもので解くという繰り返しを n 回行う必要がある。LINGO の評価版で行う場合も同様に、評価対象を変えて n 回解けば良い。

### 1.1.3 東京都 23 区の区立図書館の評価

本章では日本に DEA 法を紹介普及した利根薫 (1993) が用いた表 1.1 の東京都 23 区の区立図書館の 1986 年度のデータを用いる。表 1.1 のデータは東京都 23 区の区立図書館を、蔵書数 (100 万冊) と職員数 (100 人) という 2 個の経営資源を入力とし、その成果である 2 個の貸し出し数 (100 万冊) と登録者数 (10 万人) で評価する。2 入力 2 出力モデルであるが、本章では登録者数を省いた 2 入力 1 出力モデルで説明する。

表 1.1 東京都 23 区の区立図書館

SN	区	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数
1	千代田	163,523	26	105,321	5,561
2	中央	338,671	30	314,682	18,106
3	台東	281,655	51	542,349	16,498
4	荒川	400,993	78	847,872	30,81
5	港	363,116	69	758,704	57,279
6	文京	541,658	114	1438,75	66,137

<sup>4</sup> i を 1 から n まで変更した n 個の制約式を表す。

7	墨田	508.141	61	839.597	35.295
8	渋谷	338.804	74	540.821	33.188
9	目黒	511.467	84	1562.27	65.391
10	豊島	393.815	68	978.117	41.197
11	新宿	509.682	96	930.437	47.032
12	中野	527.457	92	1345.19	56.064
13	品川	601.594	127	1164.8	69.554
14	北	528.799	96	1348.59	37.467
15	江東	394.158	77	1100.78	57.727
16	葛飾	515.624	101	1070.49	46.16
17	板橋	566.708	118	1707.65	102.967
18	江戸川	467.617	74	1223.03	47.236
19	杉並	768.484	103	2299.69	84.51
20	練馬	669.996	107	1901.47	69.576
21	足立	844.949	120	1909.7	89.401
22	大田	1258.98	242	3055.19	97.941
23	世田谷	1148.86	202	4096.3	191.166

このデータを、**ライナス・シュラージ** (Linus Schrage) シカゴ大学ビジネス・スクール元教授が開発し公開している LINGO の DEA 法の**雛型モデル**<sup>5</sup>を改良した CCR モデルを実行し、**表 1.2**の結果を得た。実は、刀根氏をサポートし DEA 法の日本における普及を精力的に行ってきた成蹊大学の1年先輩の上田徹元教授の論文 (Ueda. T, 2007) を真剣に読んだくらいで、通常の研究者的ように DEA 法の先行研究を丹念に調べ検討しないで、学生とともに考え自分なりに実践的な評価の可視化手法を開発した。

**表 1.2 23 区の CCR モデルによる結果**

SN	区	SCORE	W1	W2	W3	S1	S2	S19	S23
1	千代田	0.193	0.002	0.025	0.002	0.193	0.181	0.181	0.181
2	中央	0.47	0	0.033	0.001	0.392	0.47	0.47	0.261
3	台東	0.54	0.004	0	0.001	0.529	0.476	0.476	0.54
4	荒川	0.593	0.002	0	0.001	0.553	0.487	0.487	0.593
5	港	0.586	0.003	0	0.001	0.556	0.492	0.492	0.586
6	文京	0.745	0.002	0	0.001	0.657	0.565	0.565	0.745
7	墨田	0.616	0	0.016	0.001	0.59	0.616	0.616	0.463

<sup>5</sup> 『新村秀一(2007). Excel と LINGO で学ぶ数理計画法. 丸善. 』には、LINGO と What'sBest! (WB!) という Excel のアドインの数理計画法ソフトの古い評価版と、これまで数理計画法で開発されてきた**雛形モデルがカテゴリ別に分類**されている。またポートフォリオ分析の専門書を読んだが、ポートフォリオの幾つかの雛形モデルを使った方が、簡単に実際のポイントが分かった。授業等の教材に利用できる。

8	渋谷	0.448	0.003	0	0.001	0.385	0.327	0.327	0.448
9	目黒	0.897	0.001	0.008	0.001	0.897	0.833	0.833	0.857
10	豊島	0.705	0.001	0.01	0.001	0.705	0.644	0.644	0.697
11	新宿	0.512	0.002	0	0.001	0.488	0.434	0.434	0.512
12	中野	0.719	0.001	0.007	0.001	0.719	0.655	0.655	0.715
13	品川	0.543	0.002	0	0	0.478	0.411	0.411	0.543
14	北	0.715	0.002	0	0.001	0.7	0.629	0.629	0.715
15	江東	0.783	0.003	0	0.001	0.729	0.64	0.64	0.783
16	葛飾	0.582	0.002	0	0.001	0.541	0.475	0.475	0.582
17	板橋	0.845	0.002	0	0	0.752	0.648	0.648	0.845
18	江戸川	0.787	0.001	0.009	0.001	0.787	0.74	0.74	0.734
19	杉並	1	0	0.01	0	1	1	1	0.839
20	練馬	0.849	0.001	0.006	0	0.849	0.796	0.796	0.796
21	足立	0.729	0	0.005	0	0.729	0.713	0.713	0.634
22	大田	0.681	0.001	0	0	0.64	0.565	0.565	0.681
23	世田谷	1	0.001	0	0	1	0.908	0.908	1

式(1.3)の目的関数の効率値を **SCORE** とする. **DEA 効率値** と言い, 各評価対象に最もよい重みをかけて得られた効率値である. 例えば千代田区は, **表 1.1** の千代田区のデータに 1 行目の (0.002, 0.025, 0.002) という重みをかけて式 (1.4) のようにクロス効率値が計算される.

$$\begin{aligned} \text{SCORE} &= w_3 * y_1 / (w_1 * x_1 + w_2 * x_2) \\ &= 0.002 * 105.321 / (0.002 * 163.523 + 0.025 * 26) = 0.193 \quad (1.4) \end{aligned}$$

この重みは, 次の LP モデルで評価対象を千代田区 (h=1) から世田谷区 (h=23) に順次固定して, 23 回別々に解くことで求められる. ただし, 元のモデルは最大化すべき目的関数が分数であり, 23 個の制約式も分数であり, **NLP** で解く必要がある. NLP は 2000 年以降になって初めて **大域的最適解** すなわち最大化を行っておれば **最大値**, 最小化を行っておれば **最小値** を保証できるようになった. それ以前は, 局値すなわち **極小値** や **極大値** しか保証されなかった. 微分や偏微分はこの極小値や極大値を求める方法であり, 現実問題には役に立たない. 多くの数学者や統計研究者や利用者は, このことを意識していないことが多い.

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= w_{3h} * y_{1h} / (w_{1h} * x_{1h} + w_{2h} * x_{2h}) ; \text{For } h \\ w_{3h} * y_{1i} / (w_{1h} * x_{1i} + w_{2h} * x_{2i}) &\leq 1 ; \text{ for } i=1, \dots, 23 \quad (1.5) \end{aligned}$$

そこで, 目的関数の分母を 1 に固定し制約式に入れる. また元の制約式分母を払うことで (1.6) の **LP** モデルを解くことに置き換える. これで数理計画法の入門であり, 計算時間の早い LP で解くことができる. LP の計算ロジックは **単体法 (シンプレックス法)** と呼ばれる. 良いソフトウェアがない時代, 数理計画法の授業とさえいえばこの単体法の計算の説明にかなりの時間を割いていた. しかし, 数理計画法の研究者以外, そのようなコンピューターの計算ロジックを教えても

何の役にも立たず時間の無駄である。筆者は、「数学に基礎を置く統計や数理計画法は、専門家から学生までもが使いやすく高機能なソフトがあれば、大学教育ではソフトを使った実践教育に組み替えるべきだ」という主張している。しかし、なかなか浸透しない。オバマ元大統領が「データサイエンス」と言って米国でブームになると、社会全体が「データサイエンス」に注目している。個人の主張の限界であろう。

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= w_{3h} * y_{1h} \\ w_{1h} * X_{1h} + w_{2h} * X_{2h} &= 1; \quad \text{For } h \\ w_{3h} * y_{1i} &\leq (w_{1h} * X_{1i} + w_{2h} * X_{2i}); \quad \text{for } i=1, \dots, 23 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$h=1$  の場合、1 行目の千代田区の重みが千代田区に最適な重みである。この重みを他の 23 区の制約式にかけて **クロス効率値** が 1 を超えないようにする。ガソリンを投入しても、エンジンは理想的な 1 になるのが上限であるという説明が CCR モデルで行われている。これらの 23 個の効率値が S1 列に示されている。千代田区は自分に最適な重みをかけて計算したのに 0.193 しかない。これは S1 列を見ると分かるように、杉並区と世田谷区が早々と 1 になって、千代田区が 0.193 以上になるように効率値を改善できないからである。すなわち千代田区は、杉並区と世田谷区に比べて、どこが悪いのか客観的な数値で改善できる。これが千代田区の **DEA 効率値** 0.193 を求める 1 回目の LP 計算である。

個々の評価対象に最適な重みを与える点に、DEA 法による評価法の一番大きな特徴がある。多くの企業等で行われている評価は、評価対象者が必ずしも納得できる客観性がない。しかし、自分に最適な重みで他が自分より良い評価であれば、SCORE が 1 になる DEA 効率的な評価対象すなわち杉並区と世田谷区を自分の改善目標にすべきことが数値を比較して納得できる。S1 から S23 は 23 行×23 列の配列で、**クロス効率値** と呼ばれる。例えば 2 番目の中央区を評価対象に選ぶと、重みは 2 行目のものが得られ、この重みを 23 区に掛けたクロス効率値が S2 列に出力される。CCR モデルは、この Excel に出力された **表 1.2** の意味を理解するだけで、読者は簡単に評価と問題点を発見できる。

もしその結果に納得ができない評価対象者がいれば、評価に用いた入力と出力変数に問題がないかを話し合えばよい。即ちブルーカラーの労働生産性は、日本は高いといわれている。しかしホワイトカラーの **知的生産性** は驚くほど低い。DEA 法はビジネスマンの低い知的生産性を高める有効な手法と考えて、普及することを目標としている。すなわち数値で客観的にすぐ結論の出るテーマの問題解決に、無手勝流で時間を割くべきではない。

**表 1.3** はクロス効率値の利用の仕方である。すなわち Excel 上の SCORE が 1 になる杉並区と世田谷区の行だけを表示すればよい。この表を見れば、杉並区と世田谷区を手本に改善策を考えれば良いのは、S1, S9, S10, S12, S18, S20 の 6 区立図書館である。杉並区を手本にすれば良いのは S2, S7, S19 の 3 区立図書館である。世田谷区を手本にすれば良いのは S3 から S6, S8, S11, S13 から S17, S21 から S23 の 14 区立図書館である。この事実から、恐らく世田谷が 23 区の中で最も効率的であることが、この後紹介する **Inverted DEA** を行わなくても推測できる。これは、杉並が 1 になる計が 10 で、世田谷が 20 であることでも確認できる。

表 1.3 クロス効率値の利用法

SN	区	SCORE	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
19	杉並	1	1	1	0.839	0.839	0.839	0.839	1	0.839
23	世田谷	1	1	0.908	1	1	1	1	0.908	1
SN	区	SCORE	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
19	杉並	1	1	1	0.839	1	0.839	0.839	0.839	0.839
23	世田谷	1	1	1	1	1	1	1	1	1
SN	区	SCORE	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	計
19	杉並	1	0.839	1	1	1	1	0.839	0.839	10
23	世田谷	1	1	1	0.908	1	1	1	1	20

この結果を表 1.4 のようにまとめればよい. これを筆者は DEA クラスターと名付けた (Shinmura, S. 2012). 1 入力 2 出力モデルあるいは 1 入力 1 出力モデルの場合、2 個の比が得られ、それを図 1.1 のような散布図に描くことで、非効率な評価対象がどの分析対象を手本にすればよいか分かる。しかし、 $p*q$  が 3 以上であるとお手上げである。表 1.4 はこの制限がないことと、統計のクラスター分析と異なりクロス効率値から一意に決まる点である。

表 1.4 クロス効率値のまとめ (DEA クラスター)

SN	手本	数	構成員
1	杉並区, 世田谷区	6	S1, S9, S10, S12, S18, S20
2	杉並区	3	S2, S7, S19
3	世田谷区	14	S3 から S6, S8, S11, S13 から S17, S21 から S23

これを図 1.1 で表すために 2 入力 2 出力でなく、2 入力 1 出力を選んだ. そして表 1.5 のように 1 入力 1 出力の 2 個の比を計算する. 日本の多くの企業は、この比を個別に経営会議で議論することが多い. 総合化した比で結果を得てから、その上でこれらの比を統計的に検討すべきである.

表 1.5 2 入力 1 出力から 2 個の 1 入力 1 出力の比を作る

SN	区	蔵書数 (x1)	職員数 (x2)	貸出数 (y1)	$y1/x1$	$y1/x2$
1	千代田	163.523	26	105.321	0.644	4.051
2	中央	338.671	30	314.682	0.929	10.489
3	台東	281.655	51	542.349	1.926	10.634
4	荒川	400.993	78	847.872	2.114	10.870
5	港	363.116	69	758.704	2.089	10.996
6	文京	541.658	114	1438.746	2.656	12.621
7	墨田	508.141	61	839.597	1.652	13.764
8	渋谷	338.804	74	540.821	1.596	7.308
9	目黒	511.467	84	1562.274	3.054	18.599

10	豊島	393.815	68	978.117	2.484	14.384
11	新宿	509.682	96	930.437	1.826	9.692
12	中野	527.457	92	1345.185	2.550	14.622
13	品川	601.594	127	1164.801	1.936	9.172
14	北	528.799	96	1348.588	2.550	14.048
15	江東	394.158	77	1100.779	2.793	14.296
16	葛飾	515.624	101	1070.488	2.076	10.599
17	板橋	566.708	118	1707.645	3.013	14.472
18	江戸川	467.617	74	1223.026	2.615	16.527
19	杉並	768.484	103	2299.694	2.993	22.327
20	練馬	669.996	107	1901.465	2.838	17.771
21	足立	844.949	120	1909.698	2.260	15.914
22	大田	1258.981	242	3055.193	2.427	12.625
23	世田谷	1148.863	202	4096.3	3.566	20.279

図 1.1 は、横軸が貸し出し数/蔵書数、縦軸が貸し出し数/職員数の Excel による散布図である。本書では Excel で表示できる図はできる限り Excel を用いるが、それ以外は統計ソフトの JMP を用いる。軸の表示に問題あるが、デフォルト<sup>6</sup>のまま使う。横軸がほぼ 3 で縦軸が 22 は杉並区である。横軸がほぼ 3.5 で縦軸が 20 は世田谷区である。そして、杉並から水平に引いた線分と、杉並から世田谷に引いた線分と、世田谷から垂直に引いた線分の DEA (CCR) フロンティア<sup>7</sup>で 23 区が包み込まれるので、日本語では包絡分析法と呼ぶ<sup>7</sup>。杉並を含む上の三角形には、S2 (中央区, SCORE=0.47) と SN=7 の墨田区 (SCORE=0.617) が含まれ、次の三角形は杉並区と世田谷区を手本とする 17 区の図書館を含んでいる。世田谷区だけを手本とする三角形には、14 区が含まれている。一番原点に近いのは、杉並と世田谷を手本とする千代田区である。

<sup>6</sup> 筆者は、デフォルト主義は知的生産性を高める一つの手段と考えている。

<sup>7</sup> さらに言えば、後で紹介する Inverted DEA で千代田区が非効率値 1 になるが、千代田区と杉並区の水平線と y 軸の交点を線分で結び、また世田谷の交点と結ぶと、この 5 角形の範囲に全評価対象が包み込まれる。

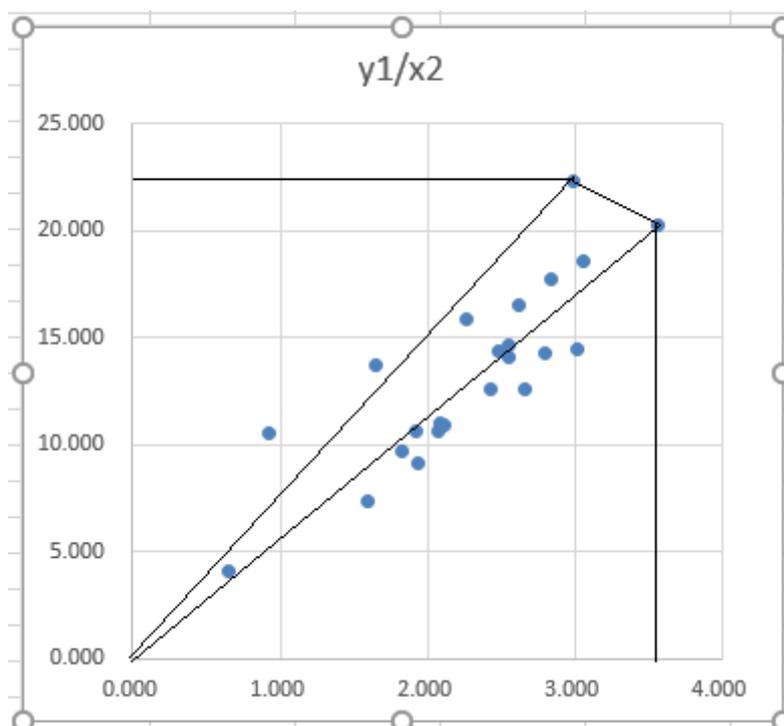


図 1.1 横軸が貸し出し数/蔵書数, 縦軸が貸し出し数/職員数の散布図

図 1.2 は, 上田によるこの図の説明であり, ほぼ全ての論文や書籍で紹介されている. 新村(2011)もこの図で説明していたが, 暫く授業で教えていて問題があると考えた. この図は, 2 入力 1 出力の代わりに, 1 入力 2 出力モデルで説明している. A, B, C と D が, SCORE が 1 で DEA 効率的になる. G は 1 未満で非効率である. この場合, 原点と G を結ぶ半直線を描く. そして B と C の線分との交点が, G の目指すべき改善目標であると多くの DEA 研究では説明している. 確かにその通りであるが, 次の問題点がある.

- ・個々に P 点を計算するのは, 面倒である. 実際にこの点を計算して, どう改善するかを議論した論文や書籍は, 存在しないのではないかと考える. 単に説明だけの説明である.
- ・実体のない改善目標は, 改善目標になりえない. G は自分に最適な重みにもかかわらず, B と C が 1 になった. 明らかに数値的に劣った点があるので, 具体的な B と C を改善目標にすることで真剣に改善活動に取り込める.

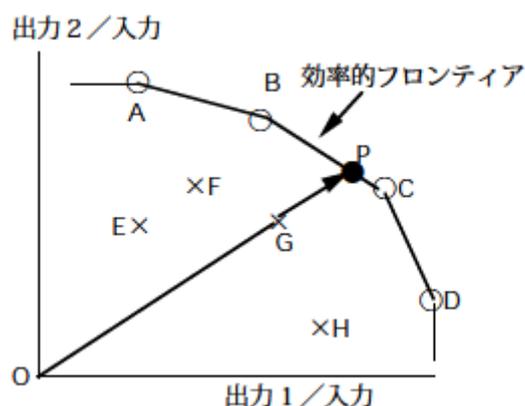


図 1.3 1 入力 2 出力による CCR モデルの解釈

### 1.2 Inverted DEA

図 1.4 は目的関数を MAX から MIN にかえて、クロス効率値を 1 以上に制限した **Inverted DEA**(山田、松井、杉山. 1994 ; 杉山. 2010)の説明である。当初このモデルは、杉山らが提案したものと知らずに使っていた。上田氏にそれを指摘され、テキサス大学に在外研究中の彼にメールで非礼を詫びて了承してもらった。

$$\begin{aligned} \text{MIN} &= b_{1h} * y_{1h} + \dots + b_{qh} * y_{qh} ; & \text{For } h \\ a_{1h} * x_{1h} + \dots + a_{ph} * x_{ph} &= 1 ; \\ (b_{1h} * y_{1i} + \dots + b_{qh} * y_{qi}) &> (a_{1h} * x_{1i} + \dots + a_{ph} * x_{pi}) ; & \text{for } i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.7)$$

このモデルは、図 1.3 に示すように、非効率なフロンティアを見つけてくれる。出力をどこまで落とせばもっとも非効率であるかが分かる。A, B, C の非効率値は 1 であり、G は 1.5 だったとしよう。これが図の P 点まで非効率的になれば、1 に下がる。CCR モデルで効率的な分析対象に餌（評価をあげる）、Inverted DEA モデルで非効率的な分析対象に鞭（評価を下げる）の様な使い分けをすればよいと一般には説明されている。

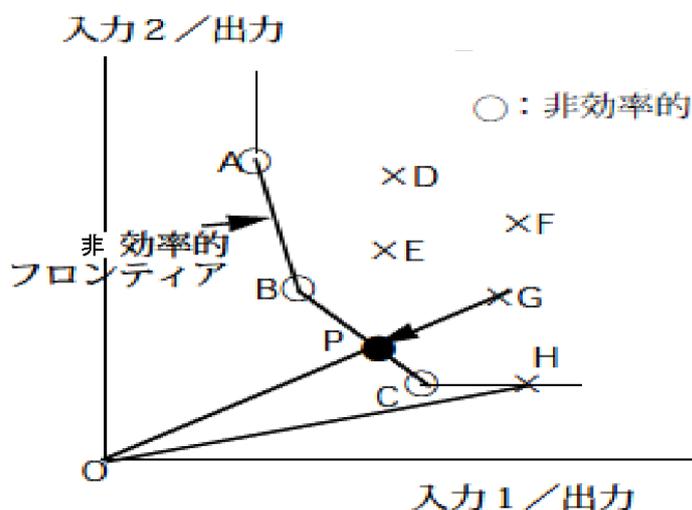


図 1.3 Inverted DEA モデル

確かにその通りであるが、多くの研究者は CCR モデルの欠陥に触れていない。

・DEA 効率的な杉並区と世田谷区が見つかった。しかし、杉並を手本にするのは 9 区立図書館、世田谷を手本にするのは 20 区立図書館あり、明らかに世田谷の方が経営効率的であることが分かる。これは、効率値の上限を 1 にしているために、複数の評価対象が効率的になるためである。

その結果、

・表 1.3 と図 1.1 に見るように 3 つのグループに分かれ、改善活動を実施するのに適していない。改善活動は、関連する全分析対象で「お祭りわっしょい」と楽しくすべきである。

・変数が多くになるにつれ、CCR モデルはより多くのグループに分割される欠点がある。すなわち企業等の改善活動では、筆者の開発した **DEA クラスタ** は意味がないとゼミ学生に指導してきた。しかし、或る治療前の状態と治療後の予後の良さで治療結果を評価する場合、患者が幾つかにグループ化された方が、患者にきめ細かい対応ができるのではないかと考えるようになった。分野ごとに柔軟に対応すべきである。

これに対して、Inverted DEA は効率値を 1 以上に制限しているので、一番良い評価対象はよほどのことがない限り一つの評価対象が選ばれる。

### 1.3 LINGO の汎用モデル

図 1.4 は **LINGO の汎用モデル**<sup>8</sup> である。LINGO はほぼ数式通りに使える自然表記<sup>9</sup>がある。簡単に微分できないような非線形関数でも、6 章で説明しているが式を定義するだけで簡単に最大値や最小値が求まる。微分や偏微分の教育に多大な時間が高校数学で割かれている。しかし、単に極大値や極小値が求まるだけである。現実の問題は、最大値や最小値が求まらなくては意味がない。これを行えるのは、大域的最適解を求める数理計画法ソフトだけで、一般の数学ソフトでは行えない。汎用統計ソフトを使う場合、プログラムのロジックを知る必要がない。その意味で、一般読者が図 1.4 の枠内の汎用モデルを理解する必要はない。単に太字の 3 か所を分析したいデータに合わせて修正すればよい。実際はデータ件数を表す 23 と入出力変数の数を表す 3 も指定せず下線部を削除すれば、LINGO がデータから判断する。結局、利用者は Excel の左から 2 個が入力で、残りの 1 個が出力という情報だけを与えればよい。

しかし、Excel 等でプログラム作成を行うことは、筆者はあまり良い判断とは思わないが、この汎用モデルはよい仕様書になる。このような汎用モデルの開示と利用は、DEA を実際利用するための**改善点 1**である。

<sup>8</sup> これを利用するためには、LINDO Japan (<http://www.lindo.jp/>)から商用版、あるいは教育に用いる場合は格安のサイトライセンス契約を結ぶ必要がある。しかし開発者のライナス教授は、以前から評価用の無償版とマニュアルを提供しているが、これは <http://www.lindo.com/>からダウンロードするか、筆者の丸善の書籍の CD を用いればよい。Excel を利用する人は、本書の説明を参考にすればよい。個々の線形計画法モデルは単純であるが、それを効率的に複数回解く必要がある。しかし入出力データが正で、入力を増やせば出力も増えるという条件を満たさないデータを用いると数値エラーを起こしやすいモデルである。データと分析目的を書いた資料を送ってもらえれば、できるだけサポートします。

<sup>9</sup> シュラージ氏は、スカラーモデルと一致する。筆者は、数式で記述する通りなので、自然表記と紹介している。

```

MODEL:
SETS:
  DMU/1..23/:SCORE, SCORE2;  !集合DMUと配列のSCOREとSCORE2の要素数が23個であることを示す。これを指定し
  ない場合は、データを入力時にLINGOが23と判断する。筆者は、利用者が分析対象の要素数に注意を払うため指定して
  いる;
  FACTOR/1..3/;  !2入力1出モデルで、3個の変数があることを示す;
  DXF(DMU, FACTOR): F, W, W_2;  !1次元集合のDMUとFACTORから2次元の派生集合と配列を与える。
  S40(DMU, DMU):S, S_2;
ENDSETS
DATA:
  NINPUTS =2;  !最初の2列が入力である;
  WGTMIN = .00000;  BIGM = 99999;
  F=@OLE( );
ENDDATA
SUBMODEL DEA:
  MAX = @SUM( DMU: SCORE);  ! (1, 7)のFor;
  @FOR( DMU( I): SCORE( I) =  ! (1, 7)のfor i=1, ..., n;
  @SUM( FACTOR(J) | J #GT# NINPUTS: F(I, J)* W( I, J));
  @SUM( FACTOR( J) | J #LE# NINPUTS:  F( I, J)* W( I, J)) = 1;
  @FOR( DMU( K):
    [LE1] @SUM( FACTOR( J) | J #GT# NINPUTS: F( K, J) * W( I, J))
      <= @SUM( FACTOR( J) | J #LE# NINPUTS: F( K, J) * W( I, J)) );
  @FOR( DXF( I, J): @BND( WGTMIN, W, BIGM));
ENDSUBMODEL
SUBMODEL Inverted:
  MIN = @SUM( DMU: SCORE2);
  @FOR( DMU( I): SCORE2( I) =
    @SUM( FACTOR(J) | J #GT# NINPUTS: F(I, J)* W_2(I, J));
  @SUM( FACTOR( J) | J #LE# NINPUTS:  F( I, J)* W_2( I, J)) = 1;
  @FOR( DMU( K):
    [LE2] @SUM( FACTOR( J) | J #GT# NINPUTS: F( K, J) * W_2( I, J))
      >= @SUM( FACTOR( J) | J #LE# NINPUTS: F( K, J) * W_2( I, J)) );
  @FOR( DXF( I, J): @BND( WGTMIN, W_2, BIGM));
ENDSUBMODEL
CALC:
  @SET( 'TERSEO', 1);

```

```

@SOLVE(DEA);
@FOR(DMU(I):
@FOR(DMU(K): S(k,i)=
    @SUM(FACTOR(J)|J#GT#NINPUTS:F(K,J)*W(I,J))/
    @SUM(FACTOR(J)|J#LE#NINPUTS:F(K,J)*W(I,J)));
@SOLVE();
@SET('TERSEO',0);
@OLE()=SCORE,W,S;
@SOLVE(Inverted);
@FOR(DMU(I):
@FOR(DMU(K): S_2(k,i)=
    @SUM(FACTOR(J)|J#GT#NINPUTS:F(K,J)*W_2(I,J))/
    @SUM(FACTOR(J)|J#LE#NINPUTS:F(K,J)*W_2(I,J)));
@SOLVE();
@SET('TERSEO',0);
@OLE()=SCORE2,W_2,S_2;
ENDCALC
END

```

図1.4 LINGOの汎用モデル

自然表記で記述するのが大変な複雑な最適モデルは、図1.4の集合 (Set) 表記を用いればよい。SETS と ENDSETS で、集合とそれに関連した配列を定義する。DMU は分析対象を表す集合名である。「/1..23/」で、集合 DMU の要素が 23 個あることを示す。太字の数字 23 を分析データに合わせて変更すればよい<sup>10</sup>。「:」から「;」の間に、CCR の効率値を表す配列名の SCORE と Inverted DEA 法の非効率値の配列名 SCORE2 を定義する。これらは、集合 DMU と同じ要素数 23 の配列である。配列は図1.5のように Excel で定義しているが、他のデータ管理ソフトを用いてもよい。定義された配列名の SCORE を Excel で選ぶと、セル範囲名の「G2..G25」が選ばれる。

<sup>10</sup> 実際にはこれを指定しなくても LINGO がデータを入力し判定できる。しかし、自分で毎回どのサイズの分析を行っているか理解する意味で、あえて指定している。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	AF	AG
1	SN 区		蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE	W1	W2	W3	S1	S2	S22	S23
2	1	千代田	163.523	26	105.321	5.561	0.193	0.002	0.025	0.002	0.193	0.181	0.181	0.181
3	2	中央	338.671	30	314.682	18.106	0.470	0.000	0.033	0.001	0.392	0.470	0.261	0.261
4	3	台東	281.655	51	542.349	16.498	0.540	0.004	0.000	0.001	0.529	0.476	0.540	0.540
22	21	足立	844.949	120	1909.7	89.401	0.729	0.000	0.005	0.000	0.729	0.713	0.634	0.634
23	22	大田	1258.98	242	3055.19	97.941	0.681	0.001	0.000	0.000	0.640	0.565	0.681	0.681
24	23	世田谷	1148.86	202	4096.3	191.166	1.000	0.001	0.000	0.000	1.000	0.908	1.000	1.000
26	SN 区		蔵書数	職員数	貸出数		SCORE2	W1	W2	W3	S1	S2	S22	S23
27	1	千代田	163.523	26	105.321		1.000	0.006	0.000	0.009	1.000	1.000	1.000	1.000
28	2	中央	338.671	30	314.682		1.443	0.003	0.000	0.005	1.443	1.443	2.589	2.589
29	3	台東	281.655	51	542.349		2.625	0.000	0.020	0.005	2.990	2.990	2.625	2.625
47	21	足立	844.949	120	1909.7		3.509	0.001	0.000	0.002	3.509	3.509	3.929	3.929
48	22	大田	1258.98	242	3055.19		3.117	0.000	0.004	0.001	3.768	3.768	3.117	3.117
49	23	世田谷	1148.86	202	4096.3		5.006	0.000	0.005	0.001	5.536	5.536	5.006	5.006

図1.5 Excelで配列を定義

「FACTOR/1..3/;」で集合FACTORを定義している。これは2入力1出力モデルで変数が3個あることと表す。DATAの方が適切であるが、LINGOが予約語で使っているので使用できない。このように1次元の集合を全て定義した後、それらを用いて2次元以上の集合が定義できる。例えば、2次元集合DXFは、「DXF(DMU, FACTOR): F, W, W\_2;」で定義され、23行3列の要素数を持つ2次元集合である。そして、配列F, W, W\_2を定義している。同様に、「S23(DMU, DMU):S,S\_2;」で23行23列の2次元集合S23を定義し、CCRとInverted DEA法のクロス効率値を格納する配列SとS\_2<sup>11</sup>を定義している。

次に、「DATA:…ENDDATA」でDATA節を定義する。種々のデータ値を与える。「NINPUTS =2;」は、入力変数は最初の2列でそれ以降に出力変数があることを示す。読者が、分析データに合わせて変更するのはこの3か所だけである。「WGTMIN = .00000; BIGM = 99999」は、重みの上下限値を0と99999に制限している。「F=@OLE( ) ;」は、Excel上にFというExcelの配列で定義されたデータをLINGOに読み込んでLINGOの配列Fとして最適化に用いる。分析結果をExcelに出力するには、モデルの最後で「@OLE()=SCORE2,W\_2,S\_2;」というように、等号の右にExcelの配列名を指定すればよい。

「SUBMODEL DEA: … ENDSUBMODEL」でCCRモデルを定義し、「SUBMODEL Inverted: … ENDSUBMODEL」でInverted DEAモデルを定義している。「CALC: … ENDCALC」でもって、最適化モデルを制御している。CALC節では、一般のプログラミング機能を持ったLINGOコマンドが数多く準備されている。

読者にとって重要なことは、3か所の分析対象の配列の情報の修正を行うだけである。そして、

<sup>11</sup> S2はExcelの予約語で使えない。

入出力に用いるデータ配列は、事前に Excel に定義しておく必要がある。これさえできれば、種々の分析が汎用的に行える。

配列の定義は、「G2..G24」を選んだ後、「数式」を選んで「名前の定義」で配列名SCOREを指定すればよい。他の配列も同様である。データには配列名F、CCRの重みはWで、クロス効率値はSで定義する。Inverted DEAでは、重みは「W\_2」で、クロス効率値は「S\_2」で定義する。W2とS2は予約語として使われているので配列名に用いることはできない。

#### 1.4 Inverted DEA の分析結果

表1.5の26行から49行は、Inverted DEAの最適化計算結果である。SCORE2の非効率値を見ると、世田谷が5.006、杉並が4.646と2番目に大きい。やはり東京23区の区立図書館で世田谷区が一番効率的で、千代田区が1で最も非効率なことが分かる。全ての区の重みで千代田区のクロス効率値は1になっているので23区で一番非効率なことが分かる。ここでなぜ千代田区はかくも非効率なのかの問題点が、客観的に数値で分かることが重要だ。

図1.6は、SCOREを横軸に、SCORE2を縦軸にとった23区の散布図である。この図では23区がほぼ直線上に並ぶが、一般的にはこの直線から下の三角形の部分に布置するので、それを2章以下の実例で詳しく説明する。

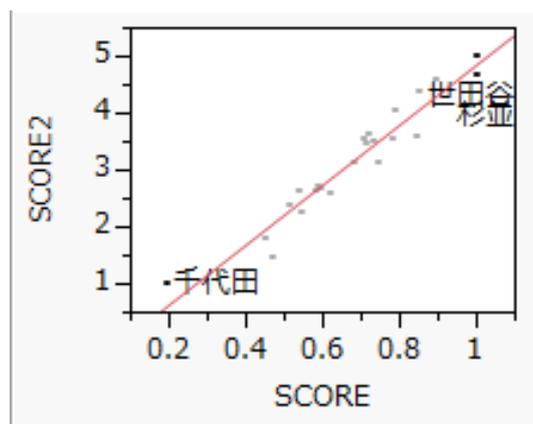


図1.6 SCOREを横軸に、SCORE2を縦軸にとった23区の散布図

DEA法は、企業や部門の業績評価に最も適している。多くの計測値が正であり、入力に従業員数、資本金、経費が増えれば、出力の利益や売り上げも一般的に増えることが期待されている。このような関係があると問題が生じないが、負のものがあつたりすると解釈に気を付ける必要がある。なぜ千代田区のSCOREが世田谷の2割<sup>12</sup>ほどしかないのであろうか？

- ・千代田区は、昼夜人口の差が大きく、図書館の利用者（顧客）である区民がそもそも少ない。
- ・千代田区は、日本の本社機能の集積地で、法人税等税収が豊富であり、後藤田（公務員）改革以前は、公立図書館業務は単にお飾りであった。

しかし、後藤田改革で「公務員の非効率な仕事ぶり」が問題になり、経費や人員等にプレッ

<sup>12</sup> CCRモデルでSCOREが0.193である。そして世田谷のSCORE2が5である。Inverted DEAでは、千代田区の非効率値は1で世田谷に対して0.2である。

シャーがかかった。その中で、筆者は最も成功したのが東京都23区の公立図書館であると思う。2章では、2012年度の筆者の3年ゼミ生の江頭さんの異なった1986年度と2011年度の比較結果を紹介する。彼女は、利根のデータでDEAを理解した後、25年の時間差と変数を増やして分析した。その結果、筆者が分析したのではあるが、例えば千代田区は25年前とほぼ同じ予算で25年後にDEA効率的になることが分かった。筆者は、東京都の中央図書館で説明を行って、区立図書館の責任者を集めて説明会を希望したが実現しなかった。そこで、思い余って猪瀬副知事に「公務員改革の成功例」として取り上げてほしいと書簡を出したがなしのつぶてであった。また世田谷図書館で、郷里の綿貫民輔衆議院元議長夫妻にお会いしたので、後日「後藤田改革の成功事例」として取り上げてくださると資料を郵送したが不発に終わった。また、水泳部の1年先輩の松本晃カルビー会長に彼の経営方針と実績も調べないでDEAを売り込んだが、「間に合っている」と打ちちゃりを食った。

そうこうするうちに、葛屋と地方の公立図書館のタイアップがマスコミで取り上げられて注目を浴びた。本来は東京都の区立図書館の成功例を紹介すべきであろう。

2013年卒業ゼミの黒岩さんは、東京都27市の市立図書館を取り上げた。ここでは、厚木市と西東京市が効率的であることの理由が面白い。成蹊大学のある武蔵野市は25年前の千代田区に似ていて、区立図書館とは改革改善のタイムラグがある<sup>13</sup>。区から市へ、その良い取り組みは速やかに普及すべきであろう。また、区立図書館に似た、例えば地方自治体の介護施設の評価を行い、区立図書館のような意識改革で、全施設が効率的経営に改善ができればと考えている。

表1.6 Inverted DEAの最適化計算結果

SN	区	SCORE2	W1	W2	W3	S1	S2	S22	S23
1	千代田	1.000	0.006	0.000	0.009	1.000	1.000	1.000	1.000
2	中央	1.443	0.003	0.000	0.005	1.443	1.443	2.589	2.589
3	台東	2.625	0.000	0.020	0.005	2.990	2.990	2.625	2.625
4	荒川	2.683	0.000	0.013	0.003	3.283	3.283	2.683	2.683
5	港	2.714	0.000	0.014	0.004	3.244	3.244	2.714	2.714
6	文京	3.116	0.000	0.009	0.002	4.124	4.124	3.116	3.116
7	墨田	2.565	0.002	0.000	0.003	2.565	2.565	3.398	3.398
8	渋谷	1.804	0.000	0.014	0.003	2.478	2.478	1.804	1.804
9	目黒	4.591	0.000	0.012	0.003	4.742	4.742	4.591	4.591
10	豊島	3.551	0.000	0.015	0.004	3.856	3.856	3.551	3.551
11	新宿	2.393	0.000	0.010	0.003	2.834	2.834	2.393	2.393
12	中野	3.610	0.000	0.011	0.003	3.960	3.960	3.610	3.610
13	品川	2.264	0.000	0.008	0.002	3.006	3.006	2.264	2.264

<sup>13</sup> 紙面の都合で区立図書館の分析と重なるので省いた。本書の続編としてKindle版に収録予定である。

14	北	3.468	0.000	0.010	0.003	3.960	3.960	3.468	3.468
15	江東	3.529	0.000	0.013	0.003	4.336	4.336	3.529	3.529
16	葛飾	2.616	0.000	0.010	0.002	3.223	3.223	2.616	2.616
17	板橋	3.573	0.000	0.008	0.002	4.678	4.678	3.573	3.573
18	江戸川	4.061	0.002	0.000	0.003	4.061	4.061	4.080	4.080
19	杉並	4.646	0.001	0.000	0.002	4.646	4.646	5.512	5.512
20	練馬	4.387	0.000	0.009	0.002	4.406	4.406	4.387	4.387
21	足立	3.509	0.001	0.000	0.002	3.509	3.509	3.929	3.929
22	大田	3.117	0.000	0.004	0.001	3.768	3.768	3.117	3.117
23	世田谷	5.006	0.000	0.005	0.001	5.536	5.536	5.006	5.006

### 1.5 1入力固定改善法

世田谷区が、Inverted DEAで一番良いお手本であることが分かった。どうすれば他の区立図書館は、世田谷区立図書館を目標に改善点を見つければ良いかを考えた結果、「1入力固定改善法」を考えた。即ち、他の区立図書館が世田谷区の入出力比と同じように改善できれば、全ての区立図書館が世田谷基準で効率的になる。そして一つの改革案が分かれば、それを参考に色々な改善案を考える切っ掛けになることを期待している。

表1.7は、1列目に区、2列から4列目が元のデータである。入力変数である経営資源の「蔵書数」を5列目のように固定して、6列目の職員数と7列目の貸し出し数を世田谷区の比で再計算したものを示す。千代田区は現在の蔵書数を163.52（100万冊）に固定すると、職員数は28.75（百人）必要である。しかし現状は26（百人）しか配属されておらず、2.75（百人）少ない。そして貸し出し数（10万冊）は583.05であるが世田谷に比べると477.72少ないのは、

- ・利用する区民が少ない
- ・蔵書数に魅力がないか、区民の求めている高級な内容の蔵書が多い
- ・回転率が悪い

等の色々な理由が考えられる。これらの免罪符は誰も納得がいくので、後藤田改革以前は問題にもならなかったと推測する。

千代田区に似た環境の中央区は、

- ・職員数は29.55（百人）少なく、貸し出し数は 892.86（100万冊）少ない。
- ・千代田区と比べて、利用人口が少ないので、それなりの適正な職員配置をしていたのかもしれない。
- ・Inverted DEAモデルで第2順位の杉並区は、職員数で32.12（百人）少なく、貸し出し数が440.36（100万冊）少ない。職員数が多く、貸し出し数が少なければ、効率的にはならないであろう。
- ・明らかに問題なのは、職員数が世田谷基準に比べて多いのに、貸し出し数が少ない12の区立図書館である。なぜ多いのか、区民に説明責任がある。しかし、DEAはつるし上げの道具でなく、改革改善の動議として使ってほしい。

これらの数字を検討すれば、実務に携わっている関係者はその理由と改善方法を考えることができる。そして職員数を固定した「1入力固定改善法」の結果を参考にして、改善策を楽しく検討すればよい。分析結果を、単純に組織の評価に用いるべきでないというのが筆者の主張である。全対象者が、意識改革し、より高い目標を達成すべきである。

表1.7 「蔵書数」を固定した1入力固定改善法

区	蔵書数	職員数	貸出数	蔵書数	職員数	貸出数	蔵書数	職員数	貸出数
千代田	163.523	26	105.321	163.52	28.75	583.05	0	-2.75	-477.72
中央	338.671	30	314.682	338.67	59.55	1207.54	0	-29.55	-892.86
台東	281.655	51	542.349	281.66	49.52	1004.25	0	1.48	-461.90
荒川	400.993	78	847.872	400.99	70.51	1429.75	0	7.49	-581.88
港	363.116	69	758.704	363.12	63.85	1294.70	0	5.15	-536.00
文京	541.658	114	1438.746	541.66	95.24	1931.30	0	18.76	-492.55
墨田	508.141	61	839.597	508.14	89.34	1811.79	0	-28.34	-972.19
渋谷	338.804	74	540.821	338.80	59.57	1208.01	0	14.43	-667.19
目黒	511.467	84	1562.274	511.47	89.93	1823.65	0	-5.93	-261.37
豊島	393.815	68	978.117	393.82	69.24	1404.16	0	-1.24	-426.04
新宿	509.682	96	930.437	509.68	89.62	1817.28	0	6.38	-886.85
中野	527.457	92	1345.185	527.46	92.74	1880.66	0	-0.74	-535.48
品川	601.594	127	1164.801	601.59	105.78	2145.00	0	21.22	-980.20
北	528.799	96	1348.588	528.80	92.98	1885.45	0	3.02	-536.86
江東	394.158	77	1100.779	394.16	69.30	1405.38	0	7.70	-304.60
葛飾	515.624	101	1070.488	515.62	90.66	1838.47	0	10.34	-767.98
板橋	566.708	118	1707.645	566.71	99.64	2020.61	0	18.36	-312.97
江戸川	467.617	74	1223.026	467.62	82.22	1667.30	0	-8.22	-444.27
杉並	768.484	103	2299.694	768.48	135.12	2740.05	0	-32.12	-440.36
練馬	669.996	107	1901.465	670.00	117.80	2388.89	0	-10.80	-487.42
足立	844.949	120	1909.698	844.95	148.56	3012.69	0	-28.56	-1102.99
大田	1258.98	242	3055.193	1258.98	221.36	4488.93	0	20.64	-1433.74
世田谷	1148.86	202	4096.3	1148.86	202.00	4096.30	0	0.00	0.00

この後、元のデータ、SCOREとSCORE2、重み、クロス効率値そして出力を入力で割った2変数の比のデータを作成し、統計分析することを勧めている。統計分析だけでは、表1.1の元データの分析だけになるが、DEA法では加工されたデータがそれに加わる。その上に、効率値が1の評価対象と1未満の中で特に悪い非効率な評価対象が分かるので、この結果を踏まえて分析すれば単に統計分析するよりも広い立場で検討できる。

## 第2章 1986年(昭和61年)と2011年(平成23年)の 東京都23区の公立図書館の比較評価

2012年度の3年ゼミ生の江頭さんは、新村(2011)で紹介した東京都23区の区立図書館をテーマに選んだ。自分なりの改善点にひと工夫凝らすことを貸したが、5月になってもデータが出てこない。本人に問いただすと東京都の中央図書館の年次報告書のPDFを見つけたので、1986年(昭和61年)と2011年の比較を行うため、PDFから数値をコピーしExcelに張り付けるのが大変だという。漸く6月ごろに完成したが脱帽である。しかも27市の市立図書館のデータも収集してくれた。4年の卒業ゼミ生は3年ゼミでは刊行したばかりの『最適線形判別関数(日科議連出版,2010)』の輪読をやったが、卒業ゼミのテーマにならないのでDEA法に切り替えた。黒岩さんは、当初大学図書館等のテーマを考えてアプローチしていたが良いデータが得られなかった。そこで、市立図書館のデータを黒岩さんに譲ってもよいか確認し了解を得たので、彼女は東京都の市立図書館の効率性分析を行った。江頭さんは1年次に私の「統計入門」と2年次の「経営科学」の講義科目を受けただけで、3年次のJMPによる統計実習は受けていない。黒岩さんは、3年次で初めて私のゼミに入ってきて、他の科目は一切受けていないが、両名ともよく頑張ってくれた。両名は秋に開かれたOR学会のDEA研究部会で大学院生や教官に交じって発表を行った。また黒岩さんは、東大で開催された日本計算機統計学会で発表(黒岩、新村,2012)も行った。

### 2.1 はじめに

1986年の東京都23区の公立図書館のDEA法による刀根の紹介は、その後のDEA法に大きな影響を与えた。江頭さんは、入力を床面積と蔵書数と職員数と増やして、出力を貸出数と登録者数とする3入力2出力モデルで、世田谷区と杉並区と板橋区がDEA効率的<sup>14</sup>になることを示した。企業の本社機能が集積し、夜間人口の少ない千代田区(2011年で区民が約47,000人、昼間人口が約85万人)は、住民への図書の貸し出し需要が少なく効率値(SCORE)は0.23と最低であった。残りの22図書館は0.54以上であり、千代田区の非効率性が際立っている。

また、板橋区と杉並区も含めた22区の公立図書館のデータを、床面積を固定して残りのデータを世田谷区の構成比に比例させて一入力固定改善法で計算し、現実のデータから引いた値を比較したところ、すべての区で蔵書数、職員数、貸出数、登録者数の値が負になった。すなわち、1986年で世田谷区を基準にして考えると、他の22区全ての公立図書館は、図書館という箱モノが過大であり、それに比べて蔵書数と職員数と貸出数と登録者数が少ないことが分かった。バブルの時代、なぜ世田谷だけが異なった運営方針をとったのか解明できていないが興味のある点である<sup>15</sup>。公立美術館の中であって、千葉市立美術館は良き歴代館長にめぐまれ学芸員の士気も

<sup>14</sup> 「参照集合」という専門用語もあるが、「素人が統計ソフトを使うと誤用する」という有名なデータ解析の黎明期の思い出させる警句もある。理解不能な専門用語や専門家の主義主張で、素人の参加と普及を阻んではいけないと考える。

<sup>15</sup> 富山県は公立高校にプールがない県である。夏しか利用できないプールは公立のプールに行けば良いので他の体育施設を優先するという県の教育委員会の方針と聞いた。少数の意見で、良くも悪くも変わる公立図書館等は、考え次第で効率的にも非効率にもなる。蛇足であるが、進学校では修学旅行もない。

高いようであり、個人の頑張りが評価や結果に反映されるようだ。大企業の評価はシンクタンクや企業人に任せ、大学の研究者や学生は、自治体の図書館、美術館や病院や介護施設等を DEA 法で分析すれば、社会に役に立つ結果が得られそうだ。ビジネスマンは、自分を取り巻く課題の解決に用いてほしい。

さらに、2011 年の最新データを用いて 1986 年と比較検討を行った。2011 年単独のデータでは、世田谷が 0.84 で、杉並が 0.67 と非効率になり、代わって千代田区、港区、文京区、目黒区、大田区、板橋区、練馬区、江戸川区が効率的になった。明らかに「なぜ千代田区が効率的になったのか？」が解決すべきテーマになる。また 23 区中 8 区が DEA 効率的になった。DEA を使って全区が DEA 効率的になってほしい。

本研究では、1986 年に効率値が 0.23 と最も非効率であった千代田区と 0.68 と非効率であった大田区が、2011 年になぜ効率的になったかの理由を探して分析する。また、1986 年に一番効率的であった世田谷区が、2011 年には 0.84 と非効率になった理由を検討する必要があるが割愛する。

## 2.2 分析に用いるデータ

本研究では、1986 年のデータは刀根が用いた図書館のデータに費用と区の人口を加えた 5 入力 2 出力データを用いる。2011 年のデータは、江頭さんが「2011 年東京都公立図書館調査」の 138 頁の PDF 資料から作成した 55 変数の中から刀根のデータに対応した 7 変数を用いる。最初は、両年のデータを個別に 3 入力 2 出力と 5 入力 2 出力モデルで分析する。その後で、両年のデータを合わせて分析し、1986 年に非効率であった千代田区と大田区が、2011 年に効率的になり、区立図書館全体の効率的フロンティアが拡大したことを示す。

用いる DEA 法は、LINGO の CCR と Inverted DEA モデルである。数理計画法モデルの分析は、データのスケールリングが重要である。例えば、用いている数理計画法ソフトが  $10^{-8}$  以下を 0 と判定している場合、データの最大値と最小値の比が  $10^8$  以上であれば、計算過程で偶然に最小値を最大値で割ると 0 に判定されるものが出てきて問題を生じる。そこで各変数の最大値を求めて  $10^n$  で割ることで最大値を 1 以上 10 未満に正規化して、数値計算上のトラブルが回避できる。また、最大値で全データを割って最大値を 1 にする方法が提案されているが、この方法は単位が不明になる。筆者の変換法は、これを避けることができ、重みの比較が容易になる。

筆者は、学生に問題解決学としての数理計画法を「経営科学」という科目で 10 個以上のテーマを講義している。その中で重要視しているのは、DEA 法と日程計画 (PERT: Program Evaluation and Review Technique) である。種々の数理計画法による応用事例の中から学生がどのような企業に就職した場合でも、評価の可視化手法として DEA 法とプロジェクト管理の PERT は問題解決に役に立つと考えている。また、将来日本の企業の中核になる学部学生が、統計、数理計画法そして DEA 法等を難しい座学でなく、ソフトを使ってすぐに分析してみる教育が必要と考えている。データがある場合、客観的な結果がすぐに手に入る。その上で、データのない非定型な難しい問題の解決に時間と知恵を注ぐことが重要である。

数多く提案されている DEA 法の中で、CCR モデルと Inverted DEA モデルに限定し LINGO の汎

用モデルを準備した。そして、与えられたデータをどのように分析するかの手順を開発し、豊富な事例を本書で説明する。

効率的な評価対象と非効率的な評価対象は、効率値を表す SCORE と SCORE2 から簡単に分かる。そして、クロス効率値から表 1.4 と図 1.1 のように評価対象を効率的な評価対象の組み合わせから全分析対象をグループに分ける **DEA クラスタ** という概念を、成蹊大学で開催された DEA 法の国際会議で発表した (Shinmura, S., 2012)。しかし、評価対象を幾つかのグループに分けて、改善を図ることは、効果的でないと考えられるようになった。このため、この作業は形式的に一度はやってみればよいが、時間をかけることはないと考えられる。その後、Inverted DEA で一番効率的な評価対象を決めて、これでもって「**1 入力固定改善法**」で各分析対象の問題を考察することが重要である。その後、何が問題かを考えて列挙し、また SCORE と SCORE2 の組み合わせで 4 群に分け、元のデータ、重み、入出力の比を統計分析した方がよいと考える。

## 2.3 2011 年と 1986 年の比較

### 2.3.1 1986 年の 3 入力 2 出力モデル

表 2.1 は、1986 年の 23 区の公立図書館の床面積 (1 万 m<sup>2</sup>)、蔵書数 (100 万冊)、職員数 (100 人) を 3 入力とし、貸出数 (100 万冊) と登録者数 (10 万人) を 2 出力とする CCR モデル (表上) と Inverted DEA モデル (表下) で解いた結果である。1986 年の公立図書館を 2011 年と区別するため、SN を 31 から 53 で表わした。効率値 (SCORE) と重みとクロス効率値が LINGO から出力される。W1 は床面積、W2 は蔵書数、W3 は職員数、W4 は貸出数、W5 は登録者数を表す。データは 1 以上 10 未満に正規化してある。これで数値計算上のトラブルが回避できる。

CCR モデルで、世田谷区と杉並区と板橋区が効率的になった。そして Inverted DEA モデルから、CCR モデルで効率値 (SCORE) が 0.23 と一番小さい千代田区が、非効率的になることが分かる。ただし、CCR モデルで効率的な世田谷区、板橋区、杉並区は、Inverted DEA モデルで**非効率値**は 4.43, 3.36, 2.98 となる。CCR モデルではこの 3 図書館は効率値 1 と同列に扱われるが、Inverted DEA モデルでは世田谷区が際立っている。一般に入出力変数が増えると、CCR モデルで効率的になる評価対象が増える。そこで Inverted DEA モデルで効率値が一番大きな評価対象を基準に「**1 入力固定改善法**」で検討することを提案する。

以上から、1986 年は世田谷区、杉並区と板橋区が**効率的フロンティア**になり、千代田区が**非効率なフロンティア**であることが分かる。本書では、重みの分析は将来統計分析を行い評価する予定であり、考察しない。ただし、千代田区と中央区は少ない職員数で登録者数が多いことに特徴があり、世田谷区は床面積が効率的に生かされて登録者数が多いことに特徴があることが重みの値から示唆される。CCR モデルでは、SCORE が 1 のものと一番小さい評価対象を対比すればよい。そして入力の重みが 0 のものは経営資源を使いすぎているので 0 にして無視し、出力では成果の悪い出力を 0 にすることで最大化を図っていると考えればよい<sup>16</sup>。例えば千代田

<sup>16</sup> ただし、個別の解釈は破綻することも多いので、単なる目安である。

区と中央区は床面積と蔵書数の経営資源は予算があるので使い過ぎで、経営成果の貸し出し数は利用人口が少ないので0で抑えられる。一方、職員数が少ない割に登録者数が多いので、これらの重みは0でないと考えればよい。この解釈によれば、世田谷区は床面積が少なく、登録者数が多いようだ。ただ、これは他の評価対象との関係で決まるので、必ずしも重みの適切な解釈になるか否かは今後の課題である。Inverted DEA では、目的関数の最小化を行うので、経営資源を多く使う入力変数と経営成果の少ない出力変数に正の大きな重みがかかる。千代田区は経営資源の床面積が多く、登録者数が少ないと解釈できるが、CCR の登録者数で述べたことと矛盾している。多変量的に決められたものを単純に1変数ごとに独立して解釈するのに無理がある。今後、多変量解析で重みの解釈法を確立する必要がある。

表 2.1 1986 年の 3 入力 2 出力モデル (上:CCR, 下: Inverted DEA)

SN	区	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録	SCORE	W1	W2	W3	W4	W5
						者数						
31	千代田	0.225	0.164	0.26	0.105	0.056	0.226	0	0	3.846	0	4.064
32	中央	0.462	0.339	0.3	0.315	0.181	0.638	0	0	3.333	0	3.522
33	港	1.138	0.363	0.69	0.759	0.573	0.911	0	1.326	0.751	0	1.591
34	新宿	1.112	0.51	0.96	0.93	0.47	0.539	0	1.962	0	0.205	0.74
35	文京	1.009	0.542	1.14	1.439	0.661	0.745	0	1.846	0	0.518	0
36	台東	0.387	0.282	0.51	0.542	0.165	0.54	0	3.55	0	0.996	0
37	墨田	0.543	0.508	0.61	0.84	0.353	0.65	0	0	1.639	0.459	0.748
38	江東	0.624	0.394	0.77	1.101	0.577	0.844	0	2.537	0	0.265	0.957
39	品川	0.935	0.602	1.27	1.165	0.695	0.657	0.149	1.431	0	0	0.945
40	目黒	0.508	0.511	0.84	1.562	0.654	0.907	0.207	0	1.065	0.58	0
41	大田	1.972	1.259	2.42	3.055	0.979	0.681	0	0.794	0	0.223	0
42	世田谷	1.089	1.149	2.02	4.096	1.912	1	0.918	0	0	0	0.523
43	渋谷	0.752	0.339	0.74	0.541	0.332	0.539	0	2.952	0	0	1.624
44	中野	0.707	0.527	0.92	1.345	0.561	0.719	0	0.617	0.733	0.535	0
45	杉並	1.147	0.768	1.03	2.3	0.845	1	0	0	0.971	0.435	0
46	豊島	0.703	0.394	0.68	0.978	0.412	0.705	0	0.833	0.988	0.721	0
47	北	0.778	0.529	0.96	1.349	0.375	0.715	0	1.891	0	0.53	0
48	荒川	0.554	0.401	0.78	0.848	0.308	0.593	0	2.494	0	0.699	0
49	板橋	1.087	0.567	1.18	1.708	1.03	1	0	1.765	0	0	0.971
50	練馬	1.087	0.67	1.07	1.901	0.696	0.849	0	0.515	0.612	0.446	0
51	足立	1.072	0.845	1.2	1.91	0.894	0.787	0	0	0.833	0	0.881
52	葛飾	1.059	0.516	1.01	1.07	0.462	0.582	0	1.939	0	0.544	0
53	江戸川	0.65	0.468	0.74	1.223	0.472	0.787	0	0.743	0.882	0.643	0

SN	区	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE2	W1	W2	W3	W4	W5
31	千代田	0.225	0.164	0.26	0.105	0.056	1	4.446	0	0	0	17.98
32	中央	0.462	0.339	0.3	0.315	0.181	1.443	0	2.953	0	4.584	0
33	港	1.138	0.363	0.69	0.759	0.573	1.424	0.879	0	0	1.876	0
34	新宿	1.112	0.51	0.96	0.93	0.47	1.71	0.899	0	0	0	3.637
35	文京	1.009	0.542	1.14	1.439	0.661	2.652	0.991	0	0	0	4.01
36	台東	0.387	0.282	0.51	0.542	0.165	1.512	0	0	1.961	0	9.167
37	墨田	0.543	0.508	0.61	0.84	0.353	2.042	0	1.968	0	0	5.787
38	江東	0.624	0.394	0.77	1.101	0.577	3.505	0	0	1.299	0	6.072
39	品川	0.935	0.602	1.27	1.165	0.695	2.264	0	0	0.787	1.944	0
40	目黒	0.508	0.511	0.84	1.562	0.654	3.64	0	0	1.19	0	5.566
41	大田	1.972	1.259	2.42	3.055	0.979	1.892	0	0	0.413	0	1.932
42	世田谷	1.089	1.149	2.02	4.096	1.912	4.425	0	0	0.495	0	2.315
43	渋谷	0.752	0.339	0.74	0.541	0.332	1.535	1.329	0	0	2.838	0
44	中野	0.707	0.527	0.92	1.345	0.561	2.849	0	0	1.087	0	5.082
45	杉並	1.147	0.768	1.03	2.3	0.845	2.98	0.872	0	0	0	3.526
46	豊島	0.703	0.394	0.68	0.978	0.412	2.37	1.423	0	0	0	5.754
47	北	0.778	0.529	0.96	1.349	0.375	1.825	0	0	1.042	0	4.87
48	荒川	0.554	0.401	0.78	0.848	0.308	1.847	0	0	1.282	0	5.994
49	板橋	1.087	0.567	1.18	1.708	1.03	3.356	0.92	0	0	1.965	0
50	練馬	1.087	0.67	1.07	1.901	0.696	2.589	0.92	0	0	0	3.721
51	足立	1.072	0.845	1.2	1.91	0.894	3.111	0	1.184	0	0	3.48
52	葛飾	1.059	0.516	1.01	1.07	0.462	1.762	0.944	0	0	0	3.818
53	江戸川	0.65	0.468	0.74	1.223	0.472	2.939	1.538	0	0	0	6.222

### 2.3.2 1入力固定改善法

表2.2で、「1入力固定改善法」という問題点の見つけ方を再度説明する。ここでは一番効率的な世田谷区を手本<sup>17</sup>とする。残りの22区の床面積を固定し、構成比を世田谷区に比例させる。2列から6列は実際のデータである。次の5列は、床面積を固定して、世田谷の構成比に比例させた改善目標値である。計算方法は、元のデータの床面積がB列で世田谷が24行であるので、改善目標のG24に「 $=B24*B\$24/B\$24$ 」を入れて改善目標値を計算したい「G24:K24」を他のセルにコピーすればよい。次の4列は、実際の値からこの改善目標値を引いたものである。床面積

<sup>17</sup> これを行った後、任意の分析対象を評価基準で行ってもよい。

を固定しているので床面積の列は0であり、世田谷の改善目標は元のデータのままであり0になる。これが、改善目標が正しく計算されたことを保証している。

効率的な板橋区と杉並区を含む22区の公立図書館の蔵書数、職員数の入力と貸出数と登録者数の全ての値が負である。世田谷に比べ22区の公立図書館は、床面積がバブル時代を反映し大きすぎるのである。

床面積に対して蔵書数と職員数をこの絶対値だけ増やし、貸出数と登録者数も絶対値だけ増やすことができれば、世田谷並みに効率的になる。ただし、蔵書数と職員数を増やして、出力を改善できるか否かは充分な検討と計画が必要になる。実行可能な改善策は、余分な床面積を貸し会議室等に転用し減らすことが实际的であろう。実は、DEA法を使わないで2011年には多くの公立図書館は、中央図書館を廃止し、他の施設との共用等を試みている。どれだけ床面積を減らすかは、CCRモデルで数値を変えて再計算しシミュレーションすれば良い。

以上から1986年は、すべての公立図書館は世田谷に対し床面積という箱モノが過大であったことが分かる。

表2.2 床面積の1入力固定改善法(改善目標は省く)

区	床 面積	蔵書 数	職員 数	貸出 数	登録 者数	床 面積	蔵書 数	職員 数	貸出 数	登録 者数
千代田	2249	163523	26	105321	5561	0	-73783	-16	-740801	-33926
中央	4617	338671	30	314682	18106	0	-148498	-56	-1422333	-62957
港	11381	363116	69	758704	57279	0	-837767	-142	-3523073	-142543
新宿	11121	509682	96	930437	47032	0	-663766	-110	-3253523	-148225
文京	10086	541658	114	1438716	66137	0	-522581	-73	-2355854	-110948
台東	3873	281655	51	542349	16498	0	-127010	-21	-914757	-51502
墨田	5434	508141	61	839597	35295	0	-65235	-40	-1204791	-60112
江東	6235	394158	77	1100779	57727	0	-263737	-39	-1244962	-51744
品川	9348	601594	127	1164801	69536	0	-384774	-46	-2352118	-94591
目黒	5077	511467	84	1562274	65391	0	-24240	-10	-347803	-23748
渋谷	7524	338804	74	540821	33188	0	-455102	-66	-2289870	-98915
中野	7072	527457	92	1345185	56064	0	-218755	-39	-1315454	-68103
豊島	7029	393815	68	978117	41197	0	-347860	-62	-1666344	-82215
北	7781	528799	96	1348588	37467	0	-292224	-48	-1578792	-99148
荒川	5541	400993	78	847872	30810	0	-183674	-25	-1236771	-66476
練馬	10868	669996	107	1901465	69576	0	-476757	-95	-2187311	-121239
足立	10717	844949	120	1909698	89401	0	-285871	-79	-2122268	-98763

葛飾	10593	515624	101	1070488	46160	0	-602112	-96	-2914827	-139827
江戸川	6500	467617	74	1223026	47236	0	-218240	-47	-1222414	-66888
大田	19716	1258981	242	3055193	97941	0	-821381	-124	-4362391	-248223
板橋	10866	566708	118	1707615	102967	0	-579834	-84	-2380408	-87813
杉並	11469	768484	103	2299694	84510	0	-441684	-110	-2015191	-116857
世田谷	10888	1148863	202	4096300	191166	0	0	0	0	0

表2.3は、蔵書数（左）と職員数（右）を固定して「1入力固定改善法」で、表2.2の現実の値から改善目標値を引いた差だけを示す。蔵書数（左）を固定すると、22区の公立図書館はすべて床面積が過大であり、効率的な板橋区の登録者数を除いて貸出数と登録者数が少ないことが分かる。職員数は、12区が多くその中で品川区と大田区が21人と多い。余分な床面積を他に転用し、職員を配置転換し減らすか、1人当たりの出力を増やす具体的な改善策を検討する必要がある。残りの10区は職員数が少なく杉並区が32人不足している。これらの図書館は、床面積を他に転用し職員を増やすことで、出力を改善できるか検討すべきである。

職員数（右）を固定すると、床面積が過大で、効率的な杉並区の貸出数を除いて貸出数と登録者数が不足していることが分かる。蔵書数は蔵書数（左）を固定した場合の職員数と正と負が逆になっていることが分かる。すなわち、床面積はすべて過大で他に転用することが考えられる。蔵書数が過大な10の公立図書館は、特徴ある蔵書の魅力をアピールして出力を改善することが考えられる。少ない12の公立図書館は、魅力ある蔵書を増やすことで出力が改善されるか検討すべきである。ただ、ベストセラー本を大量に仕入れたり、CDの貸し出しに軸足を移す等は、議論の余地があろう。

表2.3 蔵書数（左）と職員数（右）の1入力固定改善法

区	床面積	職員数	貸出数	登録者数	床面積	蔵書数	貸出数	登録者数
千代田	699	-3	-477724	-21649	848	15650	-421926	-19045
中央	1407	-30	-892858	-38247	3000	168048	-293679	-10285
港	7940	5	-535995	-3142	7662	-29317	-640527	-8020
新宿	6291	6	-886847	-37777	5947	-36312	-1016319	-43819
文京	4953	19	-492579	-23993	3941	-106710	-873057	-41749
台東	1204	1	-461899	-30368	1124	-8404	-491865	-31767
墨田	618	-28	-972193	-49258	2146	161207	-397404	-22433
江東	2499	8	-304601	-7859	2085	-43775	-460682	-15143
品川	3647	21	-980198	-30567	2503	-120711	-1410596	-50653
目黒	230	-6	-261374	-19715	549	33722	-141138	-14104
渋谷	4313	14	-667193	-23188	3535	-82067	-959804	-36843

中野	2073	-1	-535476	-31703	2113	4212	-520457	-31002
豊島	3297	-1	-426040	-24332	3364	7069	-400835	-23156
北	2769	3	-536858	-50523	2607	-17195	-598168	-53384
荒川	1741	7	-581879	-35914	1337	-42627	-733868	-43007
練馬	4518	-11	-487423	-41909	5101	61440	-268357	-31685
足立	2709	-29	-1102989	-51195	4249	162456	-523748	-24163
葛飾	5706	10	-767982	-39638	5149	-58808	-977662	-49423
江戸川	2068	-8	-444274	-30574	2511	46746	-277599	-22795
大田	7784	21	-1433736	-111548	6672	-117380	-1852256	-131080
板橋	5495	18	-312997	8669	4506	-104410	-685273	-8704
杉並	4186	-32	-440355	-43363	5917	182678	210987	-12966
世田谷	0	0	0	0	0	0	0	0

以上から、世田谷区を手本に「1 入力固定改善法」で検討すると、効率的な板橋区は登録者数が多く、杉並区は貸出数が多いことに特徴があることも分かった。特徴があるから SCORE が 1 になったことも理解できる。一方「1 入力固定改善法」の問題点として、固定される入力項目の値が大きい場合、比例配分した他の入力項目も大きくなり、生産可能集合(効率的フロンティアと非効率的フロンティアで囲まれた領域)をはみ出すことが考えられる。これは、22 区の図書館の床面積が世田谷に比べて異常に大きいことを示しているにすぎない。一方、改善目標を現実に実現できるか否かを検討し、例え現状の生産可能集合をはみ出しているにすぎない。一方、改善目標を現実に実現できるか否かを検討し、例え現状の生産可能集合をはみ出しているにすぎない。一方、改善目標を現実に実現できるか否かを検討し、例え現状の生産可能集合をはみ出しているにすぎない。一方、改善目標を現実に実現できるか否かを検討し、例え現状の生産可能集合をはみ出しているにすぎない。

床面積が過大であれば過大な分を貸し会議室等への転用が考えられる。これは 2011 年データでは、図書館のスポーツや文化施設との複合施設化等で改善が行われた。職員数が過大であれば、配置転換が可能かを検討すればよい。これに対し、多くの区の公立図書館は外部委託で職員数を削減することで対応してきたようである。これに対して、過大な蔵書数は削減すべきでなく、特徴ある蔵書をアピールし貸出数を増やすべきである。

### 2.3.3 2011 年の 3 入力 2 出力モデル

表 2.4 は、2011 年の 3 入力 2 出力モデルを CCR モデル(表左)と Inverted DEA モデル(表右)で解いた結果である。2011 年の公立図書館を 1 から 23 で表わした。千代田区の 2011 年の職員数は外部委託のため調査票で 0 になっているので、登録者数を目的変数とし、残りの 4 変数で重回帰式で予測値を求め、得られた予測値の 53 人を用いた。CCR モデルから千代田区をはじめ 8 図書館が効率的になった。1986 年の効率的な世田谷区は 0.84 と非効率になった。そして Inverted DEA モデルで 6 図書館が非効率な効率的になり、効率値は墨田区の 0.506 以上であ

る.

表 2.4 2011 年の 3 入力 2 出力モデル (左 : CCR, 右 : Inverted DEA)

SN	区	床	蔵書	職員	貸出	登録	SCORE	床	蔵書	職員	貸出	登録	SCORE
		面積	数	数	数	者数		面積	数	数	数	者数	
1	千代田	0.37	0.30	0.53	0.81	0.70	1	0.37	0.30	0.53	0.81	0.70	1.12
2	中央	0.67	0.64	0.37	1.47	0.82	0.697	0.67	0.64	0.37	1.47	0.82	1.194
3	港	1.37	0.83	0.42	2.53	2.07	1	1.37	0.83	0.42	2.53	2.07	1.224
4	新宿	1.28	0.87	2.08	2.43	1.02	0.659	1.28	0.87	2.08	2.43	1.02	1
5	文京	1.19	1.04	0.31	3.64	1.80	1	1.19	1.04	0.31	3.64	1.80	1.833
6	台東	0.62	0.56	0.60	1.83	1.09	0.932	0.62	0.56	0.60	1.83	1.09	1.589
7	墨田	0.63	0.67	0.57	1.29	0.64	0.506	0.63	0.67	0.57	1.29	0.64	1
8	江東	1.76	1.48	0.61	4.59	0.97	0.847	1.76	1.48	0.61	4.59	0.97	1
9	品川	1.12	1.00	0.59	3.36	1.03	0.871	1.12	1.00	0.59	3.36	1.03	1.42
10	目黒	0.99	1.15	0.94	4.65	2.08	1	0.99	1.15	0.94	4.65	2.08	2.015
11	大田	2.13	1.71	0.16	4.82	1.92	1	2.13	1.71	0.16	4.82	1.92	1.462
12	世田谷	1.83	1.99	3.06	6.68	3.11	0.84	1.83	1.99	3.06	6.68	3.11	1.45
13	渋谷	1.09	0.85	0.32	1.64	0.63	0.535	1.09	0.85	0.32	1.64	0.63	1
14	中野	0.98	0.95	0.22	2.28	0.84	0.802	0.98	0.95	0.22	2.28	0.84	1.193
15	杉並	1.95	2.28	1.18	5.05	2.10	0.666	1.95	2.28	1.18	5.05	2.10	1.141
16	豊島	1.00	0.73	1.02	2.20	1.21	0.798	1.00	0.73	1.02	2.20	1.21	1.285
17	北	1.38	1.25	0.63	3.78	1.95	0.84	1.38	1.25	0.63	3.78	1.95	1.574
18	荒川	0.74	0.70	1.17	2.00	0.56	0.696	0.74	0.70	1.17	2.00	0.56	1
19	板橋	1.80	1.31	0.24	3.45	2.21	1	1.80	1.31	0.24	3.45	2.21	1.276
20	練馬	1.98	1.64	1.27	6.75	2.53	1	1.98	1.64	1.27	6.75	2.53	1.915
21	足立	1.99	1.77	1.33	3.30	2.70	0.744	1.99	1.77	1.33	3.30	2.70	1
22	葛飾	1.61	1.11	2.41	3.54	1.81	0.808	1.61	1.11	2.41	3.54	1.81	1.182
23	江戸川	2.17	1.24	1.59	5.34	2.45	1	2.17	1.24	1.59	5.34	2.45	1.506

### 2.3.4 1986 年と 2011 年の 3 入力 2 出力モデル

表 2.5 は, 2011 年のデータを SN 番号の 1 から 23 で, 1986 年を 31 から 53 で示す. この異なった 2 期間 46 図書館データの 3 入力 2 出力モデルを CCR モデル (表左) と Inverted DEA モデル (表右) で解いた結果である.

2011 年単独の表 2.4 の CCR モデルの 8 図書館が, 表 2.5 の 46 図書館でも効率的になった. そして, 表 2.4 の Inverted DEA モデルで非効率になった 6 図書館の効率値は, 表 2.5 の効率値でも小数点 2 桁で変更はなかった. 1986 年単独で効率的になった表 2.1 の世田谷区, 杉並区, 板橋区の効率値は, 表 2.5 では 0.84, 0.67, 1 である. すなわち, 1986 年の効率的な板橋区だけが 2011 年も効率的になった. 2011 年では 1986 年で効率的であった板橋区と非効率であった

7 図書館が効率的になり、効率的フロンティアが拡大したことを示す。この大きな改善理由は、2.5 節で検討する。

Inverted DEA モデルから、1986 年は千代田区だけが非効率なことが分かる。すなわち異なった時点の図書館を合わせて分析することで、1986 年の効率的フロンティアが 2011 年には拡大したことが分かる。

表 2.5 2011 年と 1986 年の 3 入力 2 出力モデル

SN	区	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE2
1	千代田	0.37	0.30	0.53	0.81	0.70	1	0.37	0.30	0.00	0.81	0.70	3.81
2	中央	0.67	0.64	0.37	1.47	0.82	0.7	0.67	0.64	0.37	1.47	0.82	3.54
3	港	1.37	0.83	0.42	2.53	2.07	1	1.37	0.83	0.42	2.53	2.07	3.95
4	新宿	1.28	0.87	2.08	2.43	1.02	0.66	1.28	0.87	2.08	2.43	1.02	2.29
5	文京	1.19	1.04	0.31	3.64	1.80	1	1.19	1.04	0.31	3.64	1.80	5.1
6	台東	0.62	0.56	0.60	1.83	1.09	0.93	0.62	0.56	0.60	1.83	1.09	5.08
7	墨田	0.63	0.67	0.57	1.29	0.64	0.51	0.63	0.67	0.57	1.29	0.64	2.84
8	江東	1.76	1.48	0.61	4.59	0.97	0.85	1.76	1.48	0.61	4.59	0.97	1.93
9	品川	1.12	1.00	0.59	3.36	1.03	0.87	1.12	1.00	0.59	3.36	1.03	3.05
10	目黒	0.99	1.15	0.94	4.65	2.08	1	0.99	1.15	0.94	4.65	2.08	5.35
11	大田	2.13	1.71	0.16	4.82	1.92	1	2.13	1.71	0.16	4.82	1.92	3.31
12	世田谷	1.83	1.99	3.06	6.68	3.11	0.84	1.83	1.99	3.06	6.68	3.11	4.6
13	渋谷	1.09	0.85	0.32	1.64	0.63	0.54	1.09	0.85	0.32	1.64	0.63	2.19
14	中野	0.98	0.95	0.22	2.28	0.84	0.8	0.98	0.95	0.22	2.28	0.84	2.59
15	杉並	1.95	2.28	1.18	5.05	2.10	0.67	1.95	2.28	1.18	5.05	2.10	2.71
16	豊島	1.00	0.73	1.02	2.20	1.21	0.8	1.00	0.73	1.02	2.20	1.21	4.7
17	北	1.38	1.25	0.63	3.78	1.95	0.84	1.38	1.25	0.63	3.78	1.95	4.57
18	荒川	0.74	0.70	1.17	2.00	0.56	0.7	0.74	0.70	1.17	2.00	0.56	2.22
19	板橋	1.80	1.31	0.24	3.45	2.21	1	1.80	1.31	0.24	3.45	2.21	4.09
20	練馬	1.98	1.64	1.27	6.75	2.53	1	1.98	1.64	1.27	6.75	2.53	4.52
21	足立	1.99	1.77	1.33	3.30	2.70	0.74	1.99	1.77	1.33	3.30	2.70	2.9
22	葛飾	1.61	1.11	2.41	3.54	1.81	0.81	1.61	1.11	2.41	3.54	1.81	3.52
23	江戸川	2.17	1.24	1.59	5.34	2.45	1	2.17	1.24	1.59	5.34	2.45	4.58
31	千代田	0.225	0.16	0.26	0.11	0.06	0.17	0.225	0.16	0.26	0.11	0.06	1
32	中央	0.462	0.34	0.3	0.31	0.18	0.25	0.462	0.34	0.3	0.31	0.18	1.44
33	港	1.138	0.36	0.69	0.76	0.57	0.65	1.138	0.36	0.69	0.76	0.57	1.42
34	新宿	1.112	0.51	0.96	0.93	0.47	0.45	1.112	0.51	0.96	0.93	0.47	1.71
35	文京	1.009	0.54	1.14	1.44	0.66	0.62	1.009	0.54	1.14	1.44	0.66	2.65

36	台東	0.387	0.28	0.51	0.54	0.16	0.46	0.387	0.28	0.51	0.54	0.16	1.51
37	墨田	0.543	0.51	0.61	0.84	0.35	0.4	0.543	0.51	0.61	0.84	0.35	2.04
38	江東	0.624	0.39	0.77	1.1	0.58	0.71	0.624	0.39	0.77	1.1	0.58	3.51
39	品川	0.935	0.6	1.27	1.16	0.7	0.53	0.935	0.6	1.27	1.16	0.7	2.26
40	目黒	0.508	0.51	0.84	1.56	0.65	0.75	0.508	0.51	0.84	1.56	0.65	3.64
41	大田	1.972	1.26	2.42	3.06	0.98	0.57	1.972	1.26	2.42	3.06	0.98	1.89
42	世田谷	1.089	1.15	2.02	4.1	1.91	0.89	1.089	1.15	2.02	4.1	1.91	4.42
43	渋谷	0.752	0.34	0.74	0.54	0.33	0.44	0.752	0.34	0.74	0.54	0.33	1.53
44	中野	0.707	0.53	0.92	1.35	0.56	0.61	0.707	0.53	0.92	1.35	0.56	2.85
45	杉並	1.147	0.77	1.03	2.3	0.85	0.71	1.147	0.77	1.03	2.3	0.85	2.98
46	豊島	0.703	0.39	0.68	0.98	0.41	0.58	0.703	0.39	0.68	0.98	0.41	2.37
47	北	0.778	0.53	0.96	1.35	0.37	0.6	0.778	0.53	0.96	1.35	0.37	1.82
48	荒川	0.554	0.4	0.78	0.85	0.31	0.5	0.554	0.4	0.78	0.85	0.31	1.85
49	板橋	1.087	0.57	1.18	1.71	1.03	0.82	1.087	0.57	1.18	1.71	1.03	3.36
50	練馬	1.087	0.67	1.07	1.9	0.7	0.67	1.087	0.67	1.07	1.9	0.7	2.59
51	足立	1.072	0.84	1.2	1.91	0.89	0.55	1.072	0.84	1.2	1.91	0.89	3.11
52	葛飾	1.059	0.52	1.01	1.07	0.46	0.48	1.059	0.52	1.01	1.07	0.46	1.76
53	江戸川	0.65	0.47	0.74	1.22	0.47	0.62	0.65	0.47	0.74	1.22	0.47	2.94

## 2.4 1986年と2011年の5入力2出力モデルの検討

### 2.4.1 1986年の5入力2出力モデルの検討

表 2.6 は 1986 年の図書館の費用（百万円）、区の人口（十万人）、床面積、蔵書数、職員数を入力とし、貸出数と登録者数を出力とする 5 入力 2 出力の CCR モデル(上)と Inverted DEA モデル(下)による分析結果である。7 図書館が効率的になった。Inverted DEA モデルから千代田区に加え、台東区と江戸川区が非効率であることが分かる。これは区の人口が極端に少ない千代田区が、区民人口を入力に入れることで、他の人口の多い 2 区も非効率になったことを示す。また Inverted DEA モデルで文京区の非効率値が 2.65 と一番大きい。

表 2.6 1986 年の 5 入力 2 出力の CCR モデルによる比較

SN	区	予算	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE	SCORE2
31	千代田区	0.16	0.49	0.22	0.16	0.26	0.11	0.06	0.35	1
32	中央区	0.07	0.79	0.46	0.34	0.30	0.31	0.18	0.90	1.44
33	港区	0.31	1.92	1.14	0.36	0.69	0.76	0.57	1	1.42
34	新宿区	0.31	3.31	1.11	0.51	0.96	0.93	0.47	0.57	1.29
35	文京区	0.38	1.94	1.01	0.54	1.14	1.44	0.66	1	<b>2.65</b>
36	台東区	0.15	1.76	0.39	0.28	0.51	0.54	0.16	0.57	1
37	墨田区	0.18	2.29	0.54	0.51	0.61	0.84	0.35	0.70	1.51

38	江東区	0.20	3.90	0.62	0.39	0.77	1.10	0.58	0.91	1.32
39	品川区	0.31	3.57	0.93	0.60	1.27	1.16	0.70	0.78	1.53
40	目黒区	0.21	2.67	0.51	0.51	0.84	1.56	0.65	1	2.45
41	大田区	0.75	6.60	1.97	1.26	2.42	3.06	0.98	0.79	1.48
42	世田谷区	0.59	8.08	1.09	1.15	2.02	4.10	1.91	1	2.27
43	渋谷区	0.20	2.39	0.75	0.34	0.74	0.54	0.33	0.59	1.06
44	中野区	0.30	3.32	0.71	0.53	0.92	1.35	0.56	0.76	1.72
45	杉並区	0.57	5.38	1.15	0.77	1.03	2.30	0.85	1	1.64
46	豊島区	0.25	2.77	0.70	0.39	0.68	0.98	0.41	0.71	1.50
47	北区	0.16	3.66	0.78	0.53	0.96	1.35	0.37	1	1.10
48	荒川区	0.17	1.89	0.55	0.40	0.78	0.85	0.31	0.75	1.57
49	板橋区	0.90	5.04	1.09	0.57	1.18	1.71	1.03	1	1.58
50	練馬区	0.34	5.91	1.09	0.67	1.07	1.90	0.70	0.87	1.25
51	足立区	0.44	6.23	1.07	0.84	1.20	1.91	0.89	0.79	1.38
52	葛飾区	0.97	4.18	1.06	0.52	1.01	1.07	0.46	0.58	1.05
53	江戸川区	0.33	5.17	0.65	0.47	0.74	1.22	0.47	0.79	1

#### 2.4.2 2011年の5入力2出力モデルの検討

表 2.7 は 2011 年度の CCR モデルと Inverted DEA モデルによる分析結果である。10 図書館（千代田区、港区、文京区、江東区、目黒区、大田区、板橋区、練馬区、足立区、江戸川区）が効率的になった。Inverted DEA モデルから 7 図書館が非効率効率的になった。目黒区の非効率値が 2.02 と最大になった。

表 2.7 2011 年度の 5 入力 2 出力の CCR モデルによる比較

SN	区	予算	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE	逆 SCORE
31	千代田区	0.16	0.49	0.22	0.16	0.26	0.11	0.06	0.35	1
32	中央区	0.07	0.79	0.46	0.34	0.30	0.31	0.18	0.90	1.44
33	港区	0.31	1.92	1.14	0.36	0.69	0.76	0.57	1	1.42
34	新宿区	0.31	3.31	1.11	0.51	0.96	0.93	0.47	0.57	1.29
35	文京区	0.38	1.94	1.01	0.54	1.14	1.44	0.66	1	<b>2.65</b>
36	台東区	0.15	1.76	0.39	0.28	0.51	0.54	0.16	0.57	1
37	墨田区	0.18	2.29	0.54	0.51	0.61	0.84	0.35	0.70	1.51
38	江東区	0.20	3.90	0.62	0.39	0.77	1.10	0.58	0.91	1.32
39	品川区	0.31	3.57	0.93	0.60	1.27	1.16	0.70	0.78	1.53
40	目黒区	0.21	2.67	0.51	0.51	0.84	1.56	0.65	1	2.45

41	大田区	0.75	6.60	1.97	1.26	2.42	3.06	0.98	0.79	1.48
42	世田谷区	0.59	8.08	1.09	1.15	2.02	4.10	1.91	1	2.27
43	渋谷区	0.20	2.39	0.75	0.34	0.74	0.54	0.33	0.59	1.06
44	中野区	0.30	3.32	0.71	0.53	0.92	1.35	0.56	0.76	1.72
45	杉並区	0.57	5.38	1.15	0.77	1.03	2.30	0.85	1	1.64
46	豊島区	0.25	2.77	0.70	0.39	0.68	0.98	0.41	0.71	1.50
47	北区	0.16	3.66	0.78	0.53	0.96	1.35	0.37	1	1.10
48	荒川区	0.17	1.89	0.55	0.40	0.78	0.85	0.31	0.75	1.57
49	板橋区	0.90	5.04	1.09	0.57	1.18	1.71	1.03	1	1.58
50	練馬区	0.34	5.91	1.09	0.67	1.07	1.90	0.70	0.87	1.25
51	足立区	0.44	6.23	1.07	0.84	1.20	1.91	0.89	0.79	1.38
52	葛飾区	0.97	4.18	1.06	0.52	1.01	1.07	0.46	0.58	1.05
53	江戸川区	0.33	5.17	0.65	0.47	0.74	1.22	0.47	0.79	1

#### 2.4.3 1986 と 2011 年の 5 入力 2 出力モデルの検討

表 2.8 は 2011 年度と 1986 年の 46 図書館の CCR モデル(上)と Inverted DEA モデル(下)による分析結果である。効率的な図書館は 2011 年度と同じ 10 図書館である。1986 年に効率的であった 7 図書館は文京区の 0.65 から世田谷区の 0.89 の間にある。ここでも 3 入力 2 出力と同じく、1986 年の効率的フロンティアが 2011 年の効率的フロンティアに図書館業務を拡大していることが分かる。また Inverted DEA モデルから 2011 年の目黒区の非効率値は 5.35 と一番大きい。

表 2.8 2011 年度と 1986 年の 5 入力 2 出力の CCR モデルによる比較

SN	区	費用	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数	SCORE
1	千代田区	0.16	0.51	0.37	0.30	0.53	0.81	0.70	1
2	中央区	0.37	1.23	0.67	0.64	0.37	1.47	0.82	0.79
3	港区	1.48	2.28	1.37	0.83	0.42	2.53	2.07	1
4	新宿区	1.01	3.19	1.28	0.87	2.08	2.43	1.02	0.67
5	文京区	1.11	2.00	1.19	1.04	0.31	3.64	1.80	1
6	台東区	0.40	1.82	0.62	0.56	0.60	1.83	1.09	0.93
7	墨田区	0.43	2.50	0.63	0.67	0.57	1.29	0.64	0.51
8	江東区	0.82	4.74	1.76	1.48	0.61	4.59	0.97	1
9	品川区	0.92	3.64	1.12	1.00	0.59	3.36	1.03	0.87
10	目黒区	0.40	2.62	0.99	1.15	0.94	4.65	2.08	1
11	大田区	1.50	6.94	2.13	1.71	0.16	4.82	1.92	1
12	世田谷区	0.71	8.53	1.83	1.99	3.06	6.68	3.11	0.86
13	渋谷区	0.68	2.08	1.09	0.85	0.32	1.64	0.63	0.57

14	中野区	0.63	3.12	0.98	0.95	0.22	2.28	0.84	0.88
15	杉並区	1.16	5.39	1.95	2.28	1.18	5.05	2.10	0.68
16	豊島区	0.83	2.67	1.00	0.73	1.02	2.20	1.21	0.8
17	北区	1.03	3.33	1.38	1.25	0.63	3.78	1.95	0.85
18	荒川区	0.56	2.05	0.74	0.70	1.17	2.00	0.56	0.7
19	板橋区	1.07	5.36	1.80	1.31	0.24	3.45	2.21	1
20	練馬区	1.53	7.08	1.98	1.64	1.27	6.75	2.53	1
21	足立区	0.47	6.66	1.99	1.77	1.33	3.30	2.70	1
22	葛飾区	1.10	4.50	1.61	1.11	2.41	3.54	1.81	0.82
23	江戸川区	1.79	6.80	2.17	1.24	1.59	5.34	2.45	1
31	千代田区	0.16	0.49	0.22	0.16	0.26	0.11	0.06	0.17
32	中央区	0.07	0.79	0.46	0.34	0.30	0.31	0.18	0.45
33	港区	0.31	1.92	1.14	0.36	0.69	0.76	0.57	<u>0.69</u>
34	新宿区	0.31	3.31	1.11	0.51	0.96	0.93	0.47	0.47
35	文京区	0.38	1.94	1.01	0.54	1.14	1.44	0.66	0.65
36	台東区	0.15	1.76	0.39	0.28	0.51	0.54	0.16	0.47
37	墨田区	0.18	2.29	0.54	0.51	0.61	0.84	0.35	0.41
38	江東区	0.20	3.90	0.62	0.39	0.77	1.10	0.58	0.75
39	品川区	0.31	3.57	0.93	0.60	1.27	1.16	0.70	0.56
40	目黒区	0.21	2.67	0.51	0.51	0.84	1.56	0.65	<u>0.75</u>
41	大田区	0.75	6.60	1.97	1.26	2.42	3.06	0.98	0.59
42	世田谷区	0.59	8.08	1.09	1.15	2.02	4.10	1.91	0.89
43	渋谷区	0.20	2.39	0.75	0.34	0.74	0.54	0.33	0.47
44	中野区	0.30	3.32	0.71	0.53	0.92	1.35	0.56	0.62
45	杉並区	0.57	5.38	1.15	0.77	1.03	2.30	0.85	<u>0.72</u>
46	豊島区	0.25	2.77	0.70	0.39	0.68	0.98	0.41	0.6
47	北区	0.16	3.66	0.78	0.53	0.96	1.35	0.37	<u>0.73</u>
48	荒川区	0.17	1.89	0.55	0.40	0.78	0.85	0.31	0.52
49	板橋区	0.90	5.04	1.09	0.57	1.18	1.71	1.03	<u>0.82</u>
50	練馬区	0.34	5.91	1.09	0.67	1.07	1.90	0.70	0.69
51	足立区	0.44	6.23	1.07	0.84	1.20	1.91	0.89	0.56
52	葛飾区	0.97	4.18	1.06	0.52	1.01	1.07	0.46	0.48
53	江戸川区	0.33	5.17	0.65	0.47	0.74	1.22	0.47	0.63

表 2.9 は、2011 年の 1986 年に対する増加比（上）と入出力比（下）である。増加比は、年 2.81% で 25 年間延びた場合に 2 になるので、2 以上か以下かに注目する。費用では 2 未満に千代田区を含む 7 図書館がくる。このうち世田谷区と葛飾区を除く 5 図書館が 5 入力 2 出力で効

率的になっている。千代田区は予算が25年で4%しか伸びていないが、1986年に最も非効率な状態から2011年には効率的になった。全ての項目が1以上であるが、これは外部委託で達成されたと考えられる<sup>18</sup>。人口は6区で減少している。床面積が2以上は、江東区と江戸川区だけである。蔵書数は、11図書館で2以上である。職員数は10区で減少しているが、図書館の分館や出力が著しく増えていることから、区の職員と外部委託の職員とスタッフ数の記載が統一されていないことが危惧される。特に大田区の職員数の226(100人)の減少は大きく、中央図書館だけが直轄で、分館を外部委託ということが反映されていて、区の職員を97%減らしたことを正確に表していると考えられる。18区の貸出数が2以上で、15区の登録者数が2以上で、業務量は大きく増加したことを表す。区立図書館は、この25年間に図書館業務の拡大を行ったと評価できよう。

入出力比(下)の左は、貸出数と5入力の比である。費用に対して千代田区と葛飾区の2区だけ、人口に対しては17区が、床面積に対しては9区だけ、蔵書数に対して千代田区と中央区の2区だけ、職員数に対して15区が、貸出数を増やしている。大田区の貸出数/職員数が23.84と異常なのは、職員数を区の職員としているが、他の外部委託の区では外注先の職員数も含まれているためと考えられる。

入出力比(下)の真ん中は、登録者数と5入力の比である。費用に対して千代田区を含む4区だけ、人口に対しては16区が、床面積に対しては9区だけ、蔵書数に対して千代田区を含む4区だけ、職員数に対して17区が、登録者数を増やしている。最後の列は、貸出数/登録者数の比で、千代田区を含む15区が1以下であり、リピーターが少ないようだ。

表 2.9 2011年の1986年に対する増加比(上)と入出力比(下)

	費用	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数
千代田区	1.04	1.03	1.66	1.82	2.02	7.71	12.57
中央区	5.02	1.57	1.45	1.90	1.23	4.66	4.55
港区	4.76	1.19	1.20	2.29	0.61	3.33	3.61
新宿区	3.28	0.97	1.15	1.71	2.17	2.61	2.16
文京区	2.93	1.03	1.18	1.91	0.27	2.53	2.72
台東区	2.67	1.03	1.59	1.99	1.18	3.37	6.58
墨田区	2.47	1.10	1.16	1.31	0.93	1.54	1.82
江東区	4.17	1.22	2.83	3.76	0.79	4.17	1.68
品川区	2.97	1.02	1.20	1.66	0.46	2.88	1.49
目黒区	1.91	0.98	1.94	2.24	1.11	2.98	3.18
大田区	1.99	1.05	1.08	1.36	0.07	1.58	1.96

<sup>18</sup> 外部委託は、当初中央図書館が図書館業務の建前から、共産党等は官製プアを生むと反対運動した。このため、明らかに中央図書館の調査に対して未回答等で区立図書館の不快感が読み取れる。外部委託で、司書等の資格を取った職員の配置転換による不満の解消や、17時閉館を20時まで延長や、返却ポストの設置等の改善策も出てきたことは評価すべきである。

新村秀一(2017). DEA による問題の発見と解決

世田谷区	1.19	1.06	1.68	1.73	1.52	1.63	1.63
渋谷区	3.34	0.87	1.45	2.50	0.43	3.03	1.91
中野区	2.08	0.94	1.39	1.80	0.24	1.70	1.49
杉並区	2.04	1.00	1.70	2.96	1.15	2.19	2.48
豊島区	3.32	0.96	1.42	1.85	1.50	2.25	2.94
北区	6.51	0.91	1.78	2.37	0.66	2.80	5.20
荒川区	3.37	1.08	1.34	1.74	1.50	2.36	1.80
板橋区	1.19	1.06	1.65	2.31	0.20	2.02	2.15
練馬区	4.52	1.20	1.82	2.45	1.18	3.55	3.63
足立区	1.06	1.07	1.85	2.09	1.11	1.73	3.02
葛飾区	1.13	1.08	1.52	2.14	2.39	3.31	3.93
江戸川区	5.40	1.32	3.33	2.66	2.14	4.36	5.19

	貸出/ 費用	貸出/ 人口	貸出/ 床面積	貸出/ 蔵書	登録/ 職員	登録/ 費用	登録/ 人口	登録/ 床面積	登録/ 蔵書	登録/ 職員	貸出/ 登録
千代田	7.44	7.46	4.65	4.24	3.81	12.13	12.15	7.59	6.92	6.22	0.61
中央区	0.93	2.97	3.20	2.45	3.78	0.91	2.90	3.13	2.40	3.69	1.02
港区	0.70	2.81	2.78	1.45	5.47	0.76	3.04	3.01	1.58	5.93	0.92
新宿区	0.80	2.70	2.27	1.52	1.20	0.66	2.24	1.88	1.27	1.00	1.20
文京区	0.86	2.46	2.15	1.32	9.32	0.93	2.65	2.30	1.42	10.01	0.93
台東区	1.27	3.27	2.12	1.70	2.86	2.47	6.39	4.13	3.32	5.58	0.51
墨田区	0.63	1.41	1.33	1.18	1.65	0.74	1.66	1.57	1.39	1.94	0.85
江東区	1.00	3.43	1.47	1.11	5.26	0.40	1.38	0.59	0.45	2.12	2.48
品川区	0.97	2.82	2.39	1.74	6.20	0.50	1.46	1.24	0.90	3.20	1.94
目黒区	1.56	3.03	1.53	1.33	2.67	1.67	3.25	1.64	1.42	2.86	0.93
大田区	0.79	1.50	1.46	1.16	23.84	0.98	1.86	1.81	1.45	29.63	0.80
世田谷	1.37	1.54	0.97	0.94	1.08	1.37	1.54	0.97	0.94	1.07	1.00
渋谷区	0.91	3.49	2.10	1.21	7.06	0.57	2.19	1.32	0.76	4.44	1.59
中野区	0.82	1.81	1.23	0.94	7.10	0.72	1.59	1.08	0.83	6.24	1.14
杉並区	1.07	2.19	1.29	0.74	1.92	1.21	2.47	1.46	0.84	2.16	0.88
豊島区	0.68	2.35	1.59	1.22	1.50	0.89	3.06	2.07	1.59	1.96	0.77
北区	0.43	3.07	1.58	1.18	4.27	0.80	5.70	2.92	2.19	7.92	0.54
荒川区	0.70	2.18	1.76	1.35	1.57	0.54	1.66	1.34	1.03	1.20	1.31
板橋区	1.70	1.90	1.22	0.87	9.94	1.81	2.02	1.30	0.93	10.56	0.94
練馬区	0.79	2.96	1.95	1.45	3.00	0.80	3.03	2.00	1.48	3.07	0.98
足立区	1.63	1.62	0.93	0.83	1.56	2.84	2.82	1.63	1.44	2.72	0.57

葛飾区	2.93	3.07	2.17	1.54	1.39	3.48	3.65	2.58	1.83	1.65	0.84
江戸川	0.81	3.32	1.31	1.64	2.04	0.96	3.95	1.56	1.95	2.42	0.84

#### 2.4.4 1 入力固定改善法

##### (1) 世田谷区の構成比で1入力固定改善法

表 2.10 は 2011 年のデータを，効率的でない世田谷区の構成比を目標に「1 入力固定改善法」で 5 個の入力を固定した結果である．最初は予算を固定したものであり，効率的な目黒区と足立区を除く 20 図書館の入出力はすべて負である．床面積，蔵書数，職員数が予算に対して少なく，出力も少ない．人口が負ということは，人口当たりの予算が世田谷区に比べて多いことを示す．

次は人口を固定した結果である．効率的な練馬区，足立区，江戸川区を除く他の図書館の費用，床面積，蔵書数は世田谷区に比べて人口当たり多いことが分かる．職員数は千代田区，豊島区，荒川区，葛飾区がわずかに多いが，他の区は圧倒的に少ないことが分かる．これは，世田谷区は職員の配置に重点を置いていることを意味する．千代田区は入力が高すぎるが，出力は全て世田谷基準を上回っている．これに対して，新宿区は入力が高すぎるが出力が負である．昼夜人口の差が激しい新宿は，千代田区を改善目標とすることが考えられる．墨田区と大田区は費用と床面積が高すぎるが職員数が少なく，出力も少ない．しかし大田区が効率的になっているのは，職員数が 233 人と圧倒的に少ないためであろう．

以上から，「1 入力固定改善法」は非効率な図書館を基準にしても良いことが分かる．

表 2.10 費用（上）と人口（下）を固定し世田谷区の構成比で1入力固定改善法

区	費用	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数
千代田区	0	-147688.8	-527.643	-165281.3	-18.2723	-742180.262	-2486.98
中央区	0	-323401	-2859	-398019	-123	-2032065	-80513
港区	0	-1563725	-24737	-3342018	-601	-11500051	-446609
新宿区	0	-901007	-13364	-1970166	-230	-7126706	-343088
文京区	0	-1143182	-16857	-2090747	-451	-6866478	-309618
台東区	0	-300706	-4168	-564321	-113	-1946866	-67271
墨田区	0	-274623	-4960	-557923	-131	-2816487	-127309
江東区	0	-513077	-3508	-818337	-293	-3140064	-262923
品川区	0	-744685	-12506	-1586853	-339	-5323709	-300922
目黒区	0	-223400	-551	<b>13637</b>	-81	<b>847253</b>	<b>31140</b>
大田区	0	-1114052	-17443	-2506543	-633	-9341365	-467552
世田谷区	0	0	0	0	0	0	0
渋谷区	0	-612008	-6675	-1060652	-262	-4775979	-235582
中野区	0	-449860	-6515	-825507	-251	-3677012	-194083
杉並区	0	-860853	-10546	-985100	-384	-5914182	-300938
豊島区	0	-741437	-11643	-1619072	-260	-5686778	-246589

北区	0	-914821	-12902	-1653972	-385	-5992884	-260369
荒川区	0	-470971	-7044	-876142	-126	-3292912	-191004
板橋区	0	-755435	-9710	-1695945	-439	-6655991	-249636
練馬区	0	-1143756	-19910	-2670408	-538	-7745150	-422769
足立区	0	100947	7745	448865	-70	-1123230	63428
葛飾区	0	-879836	-12361	-1991944	-236	-6867525	-303467
江戸川区	0	-1484340	-24723	-3798503	-618	-11611124	-544088

区	費用	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数
千代田区	122318	0	2636	178735	34	413988	51363
中央区	267846	0	4070	355290	-7	499651	37406
港区	1295103	0	8767	300418	-40	741434	123560
新宿区	746229	0	5940	128579	93	-73250	-14561
文京区	946802	0	7636	572103	-41	2082820	107211
台東区	249050	0	2275	136123	-5	407183	42373
墨田区	227447	0	924	81765	-33	-666627	-27176
江東区	424938	0	7485	376789	-109	876510	-75844
品川区	616760	0	3449	147765	-72	505989	-29393
目黒区	185023	0	4235	534009	-1	2596117	112596
大田区	922676	0	6426	88453	-233	-620111	-61344
世田谷区	0	0	0	0	0	0	0
渋谷区	506875	0	6438	364919	-43	15074	-12430
中野区	372581	0	3124	222365	-90	-155325	-30054
杉並区	712973	0	7898	1020112	-76	824929	12948
豊島区	614070	0	4242	107981	6	117497	23756
北区	757670	0	6699	476951	-57	1168713	73195
荒川区	390066	0	3046	220905	43	394041	-19277
板橋区	625664	0	6476	63714	-168	-742136	25812
練馬区	947278	0	4596	-6220	-128	1208643	-5730
足立区	-83606	0	5582	213727	-106	-1913484	26621
葛飾区	728694	0	6490	57486	79	20191	17340
江戸川区	1229355	0	7080	-340981	-86	8902	-2865

(2) 目黒区の構成比で1入力固定改善法

表 2.11 は、2011 年の効率的であり Inverted DEA で非効率値が一番大きい目黒区の構成比を目標に予算を固定した「1 入力固定改善法」の結果である。千代田区の職員数，世田谷区の人  
口，床面積と職員数，足立区の貸出数以外は，正の値である。19 図書館で全ての値が負であ

り，目黒区の予算に対し入出力が少ないことが分かる．人口の解釈は，費用/人口が多いことを示す．目黒区は費用が効率的に使われていると考えられる．

表 2.11 費用を固定し目黒区の構成比で 1 入力固定改善法

区	人口	床面積	蔵書数	職員数	貸出数	登録者数
千代田区	-56349	-302	-170857	15	-1088589	-15219
中央区	-117888	-2352	-410563	-49	-2811482	-109160
港区	-739652	-22703	-3392320	-303	-14625387	-561477
新宿区	-339794	-11979	-2004423	-27	-9255132	-421316
文京区	-525613	-15332	-2128444	-227	-9208635	-395702
台東区	-78834	-3620	-577864	-33	-2788323	-98197
墨田区	-33139	-4364	-572663	-44	-3732324	-160970
江東区	-58959	-2387	-846056	-129	-4862325	-326223
品川区	-234737	-11247	-1617981	-154	-7257706	-372004
目黒区	0	0	0	0	0	0
大田区	-282274	-15390	-2557316	-332	-12495917	-583494
世田谷区	392412	969	-23953	142	-1488241	-54699
渋谷区	-235017	-5744	-1083664	-126	-6205735	-288131
中野区	-99596	-5650	-846888	-125	-5005402	-242906
杉並区	-216914	-8957	-1024407	-152	-8356349	-390698
豊島区	-277827	-10499	-1647371	-92	-7445040	-311212
北区	-340692	-11485	-1689018	-177	-8170295	-340398
荒川区	-159947	-6277	-895128	-13	-4472484	-234358
板橋区	-161545	-8244	-1732197	-225	-8908346	-332419
練馬区	-291844	-17807	-2722410	-230	-10976066	-541518
足立区	361042	8387	432989	24	-2109651	27173
葛飾区	-268176	-10851	-2029280	-15	-9187272	-388727
江戸川区	-488709	-22265	-3859277	-258	-15387101	-682870

## 2.5 1986 年と 2011 年の比較評価

### 2.5.1 統計分析

図 2.1 は X 軸を 1986 年の職員数，Y 軸を 2011 年の職員数の JMP (Sall, et al., 2004) による散布図である．世田谷区は，2011 年の職員数は回帰直線の上に来て，他の 22 図書館より職員数を増やしているに対し，大田区と板橋区は減らしていることが分かる．千代田区と目黒区はほぼ回帰直線上にある．

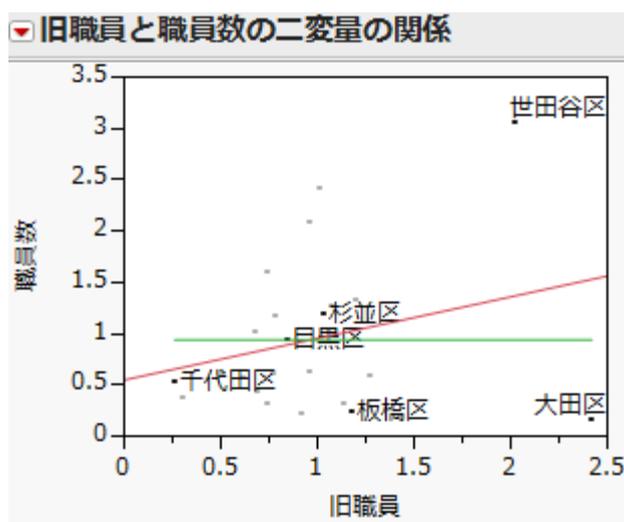


図 2.1 X軸を1986年の職員数, Y軸を2011年の職員数の散布図

図 2.2 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の床面積の散布図である. 杉並区と世田谷区と板橋区は回帰直線の上に来て床面積を増やしている. 大田区と千代田区は減らしている.

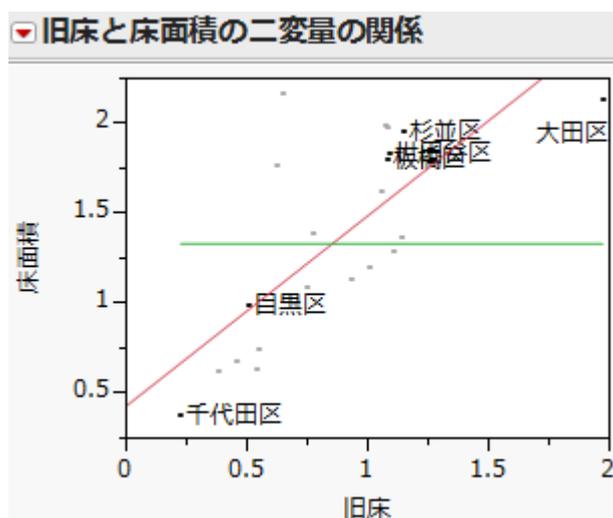


図 2.2 X軸を1986年, Y軸を2011年の床面積の散布図

図 2.3 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の蔵書数の散布図である. 杉並区は回帰直線の上に来て, 大田区と千代田区は下にきている.

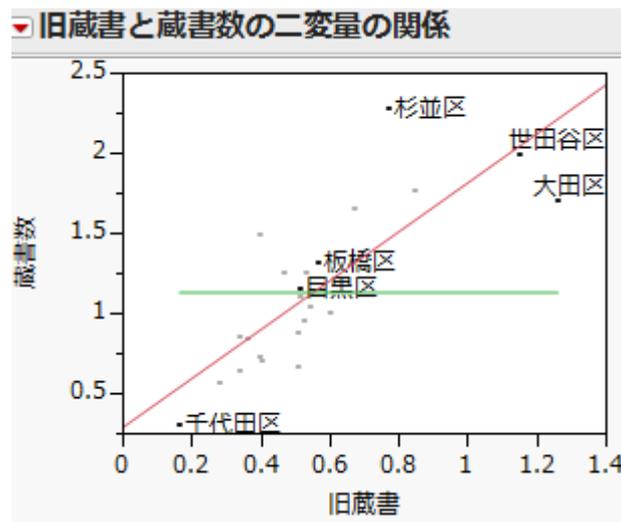


図 2.3 X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の蔵書数の散布図

図 2.4 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の費用の散布図である。大田区と杉並区は回帰直線の上に来て、千代田区、目黒区世田谷区、板橋区は下に来ている。

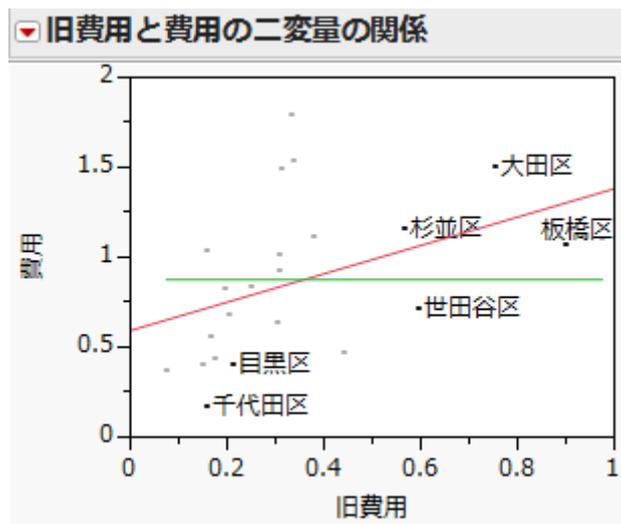


図 2.4 X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の予算の散布図

図 2.5 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の人口の散布図である。比較する図書館はほぼ回帰直線の上に来ている。

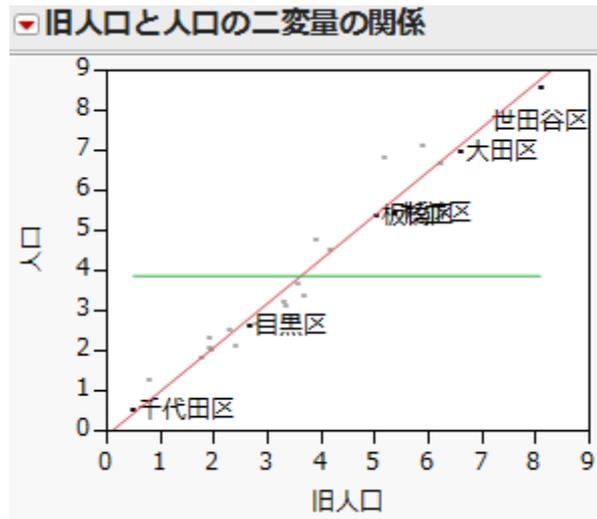


図 2.5 X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の人口の散布図

図 2.6 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の貸出数の散布図である. 杉並区や目黒区は回帰直線の上に来て, 大田区, 世田谷区, 板橋区, 千代田区は下に来ている.

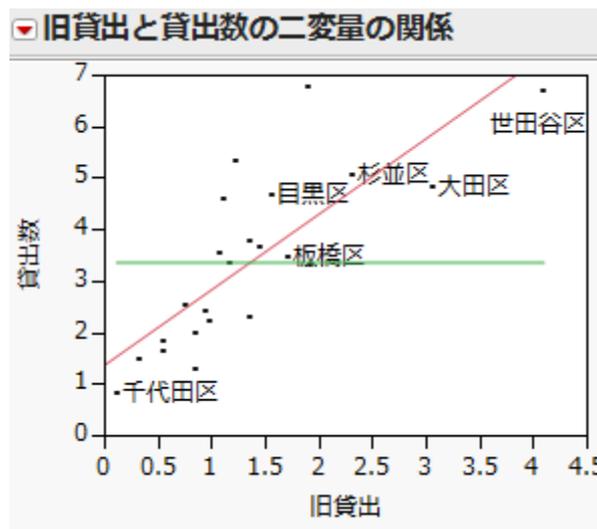


図 2.6 X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の貸出数の散布図

図 2.7 は X 軸を 1986 年, Y 軸を 2011 年の登録者数の散布図である. 目黒区は回帰直線の上に来て, 世田谷区や大田区は下に来ている.

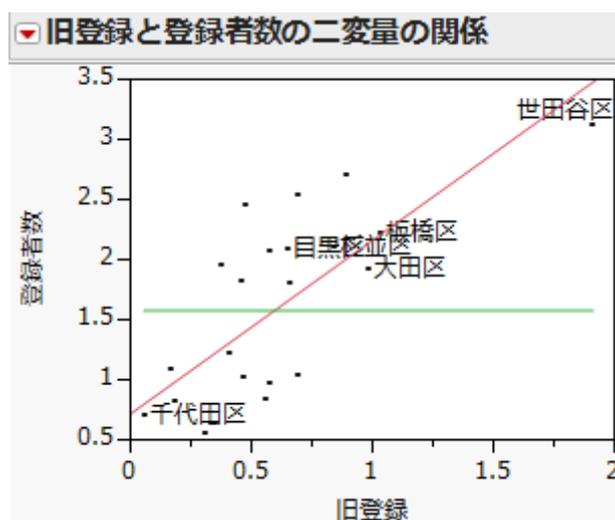


図 2.7 X軸を1986年、Y軸を2011年の登録者数の散布図

図 2.8 は、5 入力 2 出力に用いた 7 変数で主成分分析をした結果である。固有値から、第 1 主成分で累積寄与率が 71% で高いことが分かる。これは第 1 主成分のばらつきが大きいこと、すなわち区の規模の違いが大きいことを表していると考えられる。因子負荷量から、4 象限から 1 象限にかけて、図書費(予算)、床面積と蔵書数と貸出数と登録者数、人口、職員数がグループ化されている。因子負荷プロットからは、床面積と蔵書数が貸出数と登録者数と関係が深いことが分かる。スコアプロットは、千代田区と世田谷区と大田区が三角形になり、他の区が布置されている。ただしスコアプロットは、各象限でグループになる、1 象限の世田谷と大田区、4 象限の杉並と板橋と大田区等を数値で具体的に把握し、分析を行うと別の知見が得られるであろう。

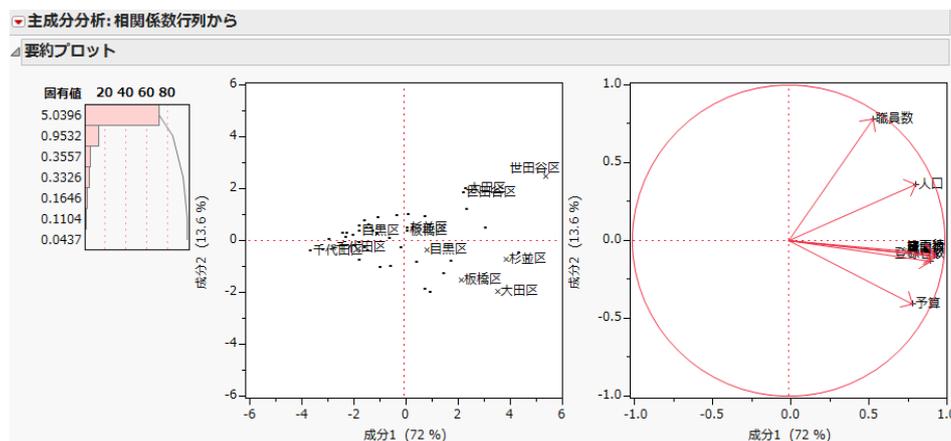


図 2.8 PCA

図 2.9 は、5 入力 2 出力に用いた 7 変数で PCA し、第 1 主成分と第 2 主成分上であるコアプロットを描いた。そして 1986 年と 2011 年のデータを個別に 95% 正規確率楕円を描いた。大きな正規確率楕円が 2011 年である。それに含まれる左上の小さなものが 1986 年である。左にある 1986 年の千代田区は、2011 年には第 1 主成分軸上を少し正の方に動いて×印にきている。1986 年に効率的であった世田谷区は、右上方向の×に移動し業務を拡大し、外れ値である。これらの 2 図

書館は因子負荷量から職員数と人口が増えたことに対応している。これに対して、大田区と板橋区と杉並区と板橋区は右下方向に変化しているので、予算が増えたことに対応していると考えられる。このように時期の違いの動きを分析することも重要だ。世田谷区の規模の拡大が、区民に好評であれば、効率的でなくても評価できよう。大田区の第2主成分上での変化の大きさは、大田区の職員が問題にすべきテーマである。

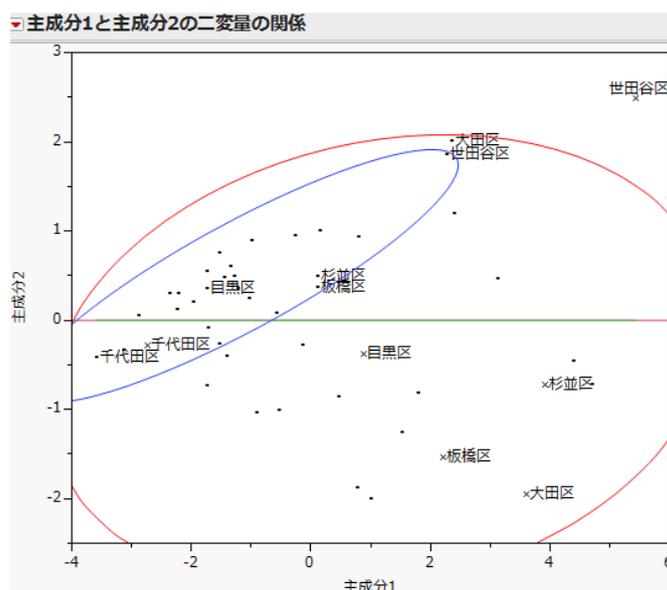


図 2.9 7変数のPCA

図 2.10 は、7入力と2出力の14個の比を計算し、主成分分析をした結果である。固有値から第1主成分の寄与率は25%で、因子負荷プロットは第4象限に貸出数/予算と登録者数/予算が、第1象限に貸出数/職員数と登録者数/職員数がきている。第1軸近辺に残りの6変数（貸出数/人口、登録者数/人口、出数/床面積、登録者数/床面積、出数/蔵書数、登録者数/蔵書数）のグループができています。比にすることで、図 2.8 と異なり規模の大きさによるばらつきが過小評価されたためだろう。

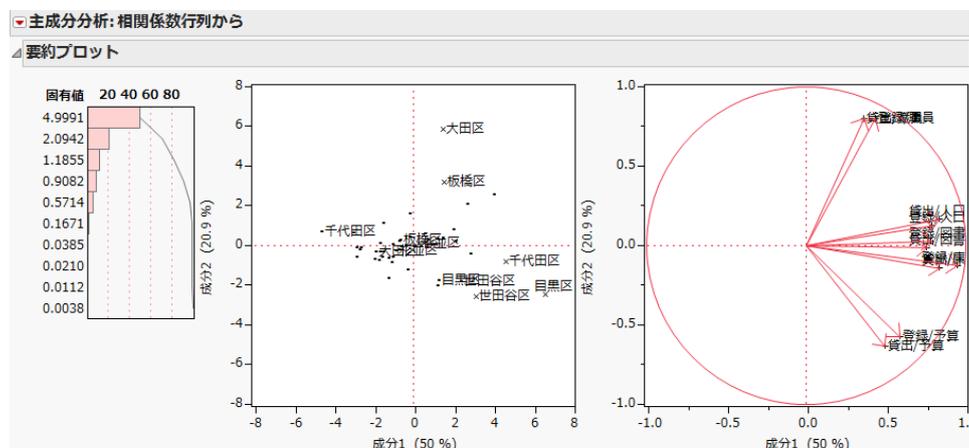


図 2.10 5入力と2出力の比のPCA

図 2.11 は、5 入力と 2 出力の 10 個の比を計算し、主成分分析をした結果である。そして 1986 年と 2011 年のデータを個別に 95%正規確率楕円を描いた。左下の小さなものが 1986 年で、右の大きな正規確率楕円が 2011 年である。左にある 1986 年の千代田区は、2011 年には第 1 主成分軸上大きく正の方にある×印まで動いた。元々効率的であった世田谷区は、右下方方向に業務を拡大している。また目黒区も同様な動きをしている。これらの 3 図書館は予算に対し貸出数や登録者数が大きい図書館と考えられる。これに対して、大田区と板橋区は第 2 象限の方に変化している。人口に対して、貸出数や登録者数が大きい図書館と考えられる。比にすると、目黒区と大田区が外れ値になっており、経営成果の改善度が高いことが分かる。

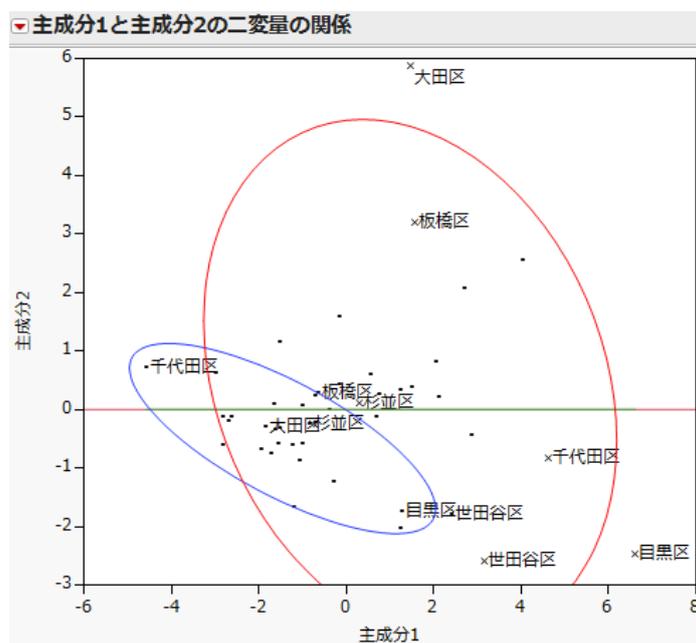


図 2.11 10 変数の比による PCA

図 2.12 は 46 図書館の CCR で選ばれた効率的の 10 図書館を線分で結んだ。2 次元への射影であるので凸法になっていないが効率的フロンティアである。一方 1986 年に効率的であった世田谷区、板橋区、杉並区はその内側にある。すなわち、25 年間に効率的フロンティアが拡大していることが分かる。

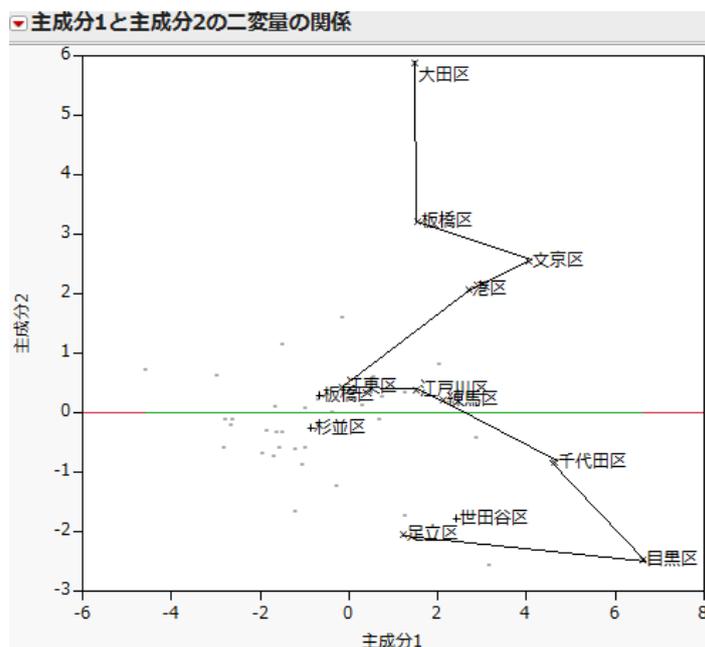


図 2.12 46 図書館の効率的フロンティア

## 2.5.2 資料による検討

### (1) 足立区の場合

「足立区公共施設再配置のための検討素材（平成 20 年 1 月，38 頁）」では，区の住民の人口減に伴う税収減に加え，耐用年数のきた保有管理する公共施設の建て替えのための再配置が検討されている．これに先駆けて「足立区の公立図書館管理運営の事実経過」によると，足立区は東京都 23 区にあつて都区財政調整制度による交付額が 23 区中 10 年間 1 位であり，財政立て直しの一環として京都市に次いで 1983 年に足立区の公立図書館が「足立区コミュニティ文化・スポーツ公社」が設立され管理運営委託されることになった．これを後押ししたのは，第二臨調を中心とする行政改革であつたといわれるが，図書館に関しては「東京都は直営」という考えを示している．このため，図書館業務を外部委託する先鞭を区の公立図書館で行つたため，労働組合や図書館界の反発を招き，反対運動の標的になった．しかし，区の公立図書館では世田谷区を除く 22 区が一部あるいは全図書館を外部委託するようになった．委託に伴い，通年・夜間開館による勤労者等の利用層の拡大という長所があげられる．負の側面は，スタッフすなわち多くのパート職員は委託費の半分程度の時給の 800 円から 900 円程度の賃金しか払われていず，官製プアを生んでいるという批判がある．しかしこの点は，東京都の区の公立図書館協議会や「東京都の区の公立図書館を良くする会」等が，実態を調査し，基準を設けるか，評価ランキングシステムを導入して改善すべきと考える．また旧来の独立した図書館から，1997 年に着工し 2000 年開館の新中央図書館は，図書館，生涯学習センター，放送大学，さらには都民住宅や駐車場を含んだ複合施設であり，他の区の中央図書館も複合施設に開館されているものが多い．

### (2) 千代田区の場合

「千代田区の公立図書館宣言（平成 22 年改定版，71 頁）」によれば，区民が約 4 万 7 千人に

対し、昼夜人口が約 85 万人という他の区と大きく異なっている特徴をもっている。このため、1986 年データでは最悪の効率値を示した。そこで平成 19 年に中央図書館を区役所本庁舎の 9・10 階にリニューアル・オープンし、民間 3 社のコンソーシアム（指定管理者）に運営委託<sup>19</sup>している。そして運営コンセプトを次の 5 つに集約している。

1. 千代田ゲートウェイ：コンシェルジェが地域や施設店舗情報の案内、神保町の古本屋や大学図書館との連携等。
2. 創造と語らいのセカンドオフィス：データベースを活用したセルフレファレンス機能を完備、貴重な資料展示を通じビジネス発想が育つ空間を構成、夜 10 時まで開館しビジネスマンが書齋代りに利用可等。
3. 区民の書齋：中高生や一般の利用客に上質な書齋空間の提供。
4. 歴史探究のジャングル：第 2 次世界大戦前後の資料や内田嘉吉文庫の整理と利用。
5. キッズセミナーフィールド：託児サービスによる保護者のリカレント学習環境を支援等。

以上の努力<sup>20</sup>により、1986 年では最悪の効率値であったが、2011 年は効率的の一つになった。本報告書には職員 49 人、スタッフ 58 人と表記されている。東京都公立図書館調査では 0 人となっているのは、区の職員は 0 であるためと考えられる。ここでいう職員は委託業者の職員数で、スタッフはアルバイト職員と考えられる。すなわち、1986 年のデータでは職員数は区の職員数とほぼ同一であるが、2011 年の職員数では区、委託業者の正社員、アルバイトが区によって回答が異なる可能性がある。そこで表 2.11 では職員数を省いて 4 入力 2 出力で再計算したが、江東区と大田区と板橋区と練馬区の 4 図書館が効率的で無くなった。今後は、人件費を費用に含めて直轄化外部委託かに影響されない調査をすべきと考えている。

表 2.11 職員数を省いて 4 入力 2 出力

SN	区	費用	人口	床面積	蔵書数	貸出数	登録者数	SCORE
1	千代田区	0.16	0.51	0.37	0.30	0.81	0.70	1
2	中央区	0.37	1.23	0.67	0.64	1.47	0.82	0.68
3	港区	1.48	2.28	1.37	0.83	2.53	2.07	1
4	新宿区	1.01	3.19	1.28	0.87	2.43	1.02	0.67
5	文京区	1.11	2.00	1.19	1.04	3.64	1.80	1
6	台東区	0.40	1.82	0.62	0.56	1.83	1.09	0.93
7	墨田区	0.43	2.50	0.63	0.67	1.29	0.64	0.5
8	江東区	0.82	4.74	1.76	1.48	4.59	0.97	0.76
9	品川区	0.92	3.64	1.12	1.00	3.36	1.03	0.82
10	目黒区	0.40	2.62	0.99	1.15	4.65	2.08	1

<sup>19</sup> この発案者は相当な切れ者であり、外部委託の弊害を避けることができる。

<sup>20</sup> これらに加え、千代田区は図書館業務に関して大きな利点がある。大学図書館の集積度が一番高い区である。

11	大田区	1.50	6.94	2.13	1.71	4.82	1.92	0.68
12	世田谷区	0.71	8.53	1.83	1.99	6.68	3.11	0.86
13	渋谷区	0.68	2.08	1.09	0.85	1.64	0.63	0.47
14	中野区	0.63	3.12	0.98	0.95	2.28	0.84	0.59
15	杉並区	1.16	5.39	1.95	2.28	5.05	2.10	0.55
16	豊島区	0.83	2.67	1.00	0.73	2.20	1.21	0.8
17	北区	1.03	3.33	1.38	1.25	3.78	1.95	0.78
18	荒川区	0.56	2.05	0.74	0.70	2.00	0.56	0.7
19	板橋区	1.07	5.36	1.80	1.31	3.45	2.21	0.78
20	練馬区	1.53	7.08	1.98	1.64	6.75	2.53	0.99
21	足立区	0.47	6.66	1.99	1.77	3.30	2.70	1
22	葛飾区	1.10	4.50	1.61	1.11	3.54	1.81	0.82
23	江戸川区	1.79	6.80	2.17	1.24	5.34	2.45	1
31	千代田区	0.16	0.49	0.22	0.16	0.11	0.06	0.17
32	中央区	0.07	0.79	0.46	0.34	0.31	0.18	0.45
33	港区	0.31	1.92	1.14	0.36	0.76	0.57	0.69
34	新宿区	0.31	3.31	1.11	0.51	0.93	0.47	0.47
35	文京区	0.38	1.94	1.01	0.54	1.44	0.66	0.65
36	台東区	0.15	1.76	0.39	0.28	0.54	0.16	0.47
37	墨田区	0.18	2.29	0.54	0.51	0.84	0.35	0.41
38	江東区	0.20	3.90	0.62	0.39	1.10	0.58	0.75
39	品川区	0.31	3.57	0.93	0.60	1.16	0.70	0.56
40	目黒区	0.21	2.67	0.51	0.51	1.56	0.65	0.75
41	大田区	0.75	6.60	1.97	1.26	3.06	0.98	0.59
42	世田谷区	0.59	8.08	1.09	1.15	4.10	1.91	0.89
43	渋谷区	0.20	2.39	0.75	0.34	0.54	0.33	0.47
44	中野区	0.30	3.32	0.71	0.53	1.35	0.56	0.62
45	杉並区	0.57	5.38	1.15	0.77	2.30	0.85	0.72
46	豊島区	0.25	2.77	0.70	0.39	0.98	0.41	0.6
47	北区	0.16	3.66	0.78	0.53	1.35	0.37	0.73
48	荒川区	0.17	1.89	0.55	0.40	0.85	0.31	0.52
49	板橋区	0.90	5.04	1.09	0.57	1.71	1.03	0.82
50	練馬区	0.34	5.91	1.09	0.67	1.90	0.70	0.69
51	足立区	0.44	6.23	1.07	0.84	1.91	0.89	0.56
52	葛飾区	0.97	4.18	1.06	0.52	1.07	0.46	0.48
53	江戸川区	0.33	5.17	0.65	0.47	1.22	0.47	0.63

SN	区	費用	人口	床面積	蔵書数	貸出数	登録者数	SCORE
1	千代田区	0.16	0.51	0.37	0.30	0.81	0.70	4.24
2	中央区	0.37	1.23	0.67	0.64	1.47	0.82	3.54
3	港区	1.48	2.28	1.37	0.83	2.53	2.07	2.57
4	新宿区	1.01	3.19	1.28	0.87	2.43	1.02	2.83
5	文京区	1.11	2.00	1.19	1.04	3.64	1.80	4.62
6	台東区	0.40	1.82	0.62	0.56	1.83	1.09	4.7
7	墨田区	0.43	2.50	0.63	0.67	1.29	0.64	2.36
8	江東区	0.82	4.74	1.76	1.48	4.59	0.97	1.85
9	品川区	0.92	3.64	1.12	1.00	3.36	1.03	2.65
10	目黒区	0.40	2.62	0.99	1.15	4.65	2.08	5.35
11	大田区	1.50	6.94	2.13	1.71	4.82	1.92	2.65
12	世田谷区	0.71	8.53	1.83	1.99	6.68	3.11	3.5
13	渋谷区	0.68	2.08	1.09	0.85	1.64	0.63	2.19
14	中野区	0.63	3.12	0.98	0.95	2.28	0.84	2.44
15	杉並区	1.16	5.39	1.95	2.28	5.05	2.10	2.71
16	豊島区	0.83	2.67	1.00	0.73	2.20	1.21	3.86
17	北区	1.03	3.33	1.38	1.25	3.78	1.95	4.57
18	荒川区	0.56	2.05	0.74	0.70	2.00	0.56	2.34
19	板橋区	1.07	5.36	1.80	1.31	3.45	2.21	3.01
20	練馬区	1.53	7.08	1.98	1.64	6.75	2.53	3.42
21	足立区	0.47	6.66	1.99	1.77	3.30	2.70	2.32
22	葛飾区	1.10	4.50	1.61	1.11	3.54	1.81	3.64
23	江戸川区	1.79	6.80	2.17	1.24	5.34	2.45	3.34
31	千代田区	0.16	0.49	0.22	0.16	0.11	0.06	1
32	中央区	0.07	0.79	0.46	0.34	0.31	0.18	1.44
33	港区	0.31	1.92	1.14	0.36	0.76	0.57	1.42
34	新宿区	0.31	3.31	1.11	0.51	0.93	0.47	1.29
35	文京区	0.38	1.94	1.01	0.54	1.44	0.66	2.65
36	台東区	0.15	1.76	0.39	0.28	0.54	0.16	1
37	墨田区	0.18	2.29	0.54	0.51	0.84	0.35	1.51
38	江東区	0.20	3.90	0.62	0.39	1.10	0.58	1.32
39	品川区	0.31	3.57	0.93	0.60	1.16	0.70	1.53
40	目黒区	0.21	2.67	0.51	0.51	1.56	0.65	2.45

41	大田区	0.75	6.60	1.97	1.26	3.06	0.98	1.48
42	世田谷区	0.59	8.08	1.09	1.15	4.10	1.91	2.27
43	渋谷区	0.20	2.39	0.75	0.34	0.54	0.33	1.06
44	中野区	0.30	3.32	0.71	0.53	1.35	0.56	1.74
45	杉並区	0.57	5.38	1.15	0.77	2.30	0.85	1.64
46	豊島区	0.25	2.77	0.70	0.39	0.98	0.41	1.5
47	北区	0.16	3.66	0.78	0.53	1.35	0.37	1.1
48	荒川区	0.17	1.89	0.55	0.40	0.85	0.31	1.63
49	板橋区	0.90	5.04	1.09	0.57	1.71	1.03	1.58
50	練馬区	0.34	5.91	1.09	0.67	1.90	0.70	1.25
51	足立区	0.44	6.23	1.07	0.84	1.91	0.89	1.38
52	葛飾区	0.97	4.18	1.06	0.52	1.07	0.46	1.05
53	江戸川区	0.33	5.17	0.65	0.47	1.22	0.47	1

## 2.6. まとめ

本研究では 1986 年と 2011 年の東京都の 23 区の公立図書館の比較を、3 入力 2 出力と 5 入力 2 出力モデルで行なった。

3 入力 2 出力モデルでは次のことが分かった。

- ・1986 年の 3 入力 2 出力の CCR モデルでは、世田谷区と杉並区と板橋区が効率的になった。

Inverted DEA モデルでは、千代田区だけが非効率値 1 であり、世田谷区の非効率値は 4.43 と最大になった。このことから世田谷区が杉並区と板橋区よりもより効率的に運用されていることが示唆される。この世田谷区を手本に床面積を固定して「1 入力固定改善法」を行うと 22 区すべての図書館で蔵書数と職員数が少なく、出力の貸出数と登録数も少ないことが分かった。すなわち、Inverted DEA モデルでは CCR モデルの効率的な評価対象に異なった非効率値が得られるので、効率的の序列化に利用できる。

- ・2011 年のデータでは、3 入力 2 出力の CCR モデルで 8 図書館（千代田区、港区、文京区、目黒区、大田区、板橋区、練馬区、江戸川区）が効率的になった。Inverted DEA モデルでは、6 図書館が非効率値 1 であり、目黒区の非効率値は 2.015 と最大になった。すなわち、効率的な評価対象中でも目黒区に注目すれば良いことが分かる。

- ・1986 年と 2011 年の 46 図書館を 3 入力 2 出力の CCR モデルで分析すると、効率的な評価対象は 2011 年単独の効率的な評価対象と同じで、Inverted DEA モデルでは 1986 年単独の場合と同じく千代田区だけが非効率値が 1 になった。そして 1986 年に効率的であった世田谷の効率値は 0.89 以下になるので、1986 年から 2011 年の効率的フロンティアに図書館業務が拡大していることが分かる。

5 入力 2 出力モデルでは次のことが分かった。

- ・1986 年の 5 入力 2 出力の CCR モデルでは、7 図書館（港区、文京区、目黒区、世田谷区、杉並区、北区、板橋区）が効率的になった。Inverted DEA モデルでは 3 図書館（千代田区、台東区、

江戸川区) が非効率値 1 である。

・1986 年と 2011 年の 46 図書館を 5 入力 2 出力の CCR モデルでは、効率的は 2011 年単独の効率的と同じ 10 図書館(千代田区, 港区, 文京区, 江東区, 目黒区, 大田区, 板橋区, 練馬区, 足立区, 江戸川区) で, Inverted DEA モデルでは 1986 年単独の場合と同じく 3 図書館の非効率値が 1 になった。このことから 5 入力 2 出力でも, 1986 年から 2011 年の効率的フロンティアが拡大していることが分かる。

以上の点は, 5 入力 2 出力に用いた 7 変数と, 入力と出力の比の組み合わせからできる 10 変数の PCA を行い, 第 1 主成分と第 2 主成分で, 2011 年の効率的フロンティアが 1986 年の効率的フロンティアを含んでいることから分かる。この図書館業務の拡大は, 22 区の公立図書館が図書館業務を外部委託したことと, 図書館が複合センターに入居することによる努力が大きいと考える。しかし, 千代田区のように個々の図書館独自の改善方法も評価できる。

外部委託に伴う「官製プア(外部委託業者における労働条件が区立職員より悪い点等)」という批判は, 区立図書館と中央図書館の話し合いで指針を出すことや, 「区の公立図書館を良くする会」によるモニター調査やランキング等による改善が考えられる。それらを通して, 区の直轄事業であれば司書を採用できない点, 千代田区のような 20 時までの開館や地域との連携や外部委託の 3 社によるコンソーシアム等旧来の公立図書館には見られない試みもあり評価に値する。現在行われている業務を直轄事業として行った場合の費用の推定を行う必要がある。また区の職員と委託企業の担当者数がいまいになっているので, 区の職員の人件費と委託費用総額の項目を設けて, 予算の中に全て含めなければ, 今後比較や管理に問題が生じると考える。

以上から, 後藤田改革で一番効果を示したのは東京都の区立図書館でないかと考える。また, 25 年間で DEA 効率的な区が増えているので, DEA を使って非効率な区も効率的な区に変身できるのではないかと期待している。東京都 27 市の市立図書館と比較すれば, 市立図書館の改善活動にタイムラグが認められる。日本社会の非効率性を排除するために, 多くの人が DEA による改善活動をその一歩に利用すればよいと考えている。

### 第3章 全国26空港のDEA法による空港経営の効率性分析

池田君は2013年度の上級演習では、北海学園大学工学部社会環境工学科の学生の伊藤彰宏と指導教授の鈴木聡士教授が行った「DEAによる空港経営の効率性評価」に掲載のデータを用いて分析した(伊藤, 2009)。伊藤君はその後大学院に進み、空港の研究を継続しているようだ。2013年度まで、テーマを決める一つの手段として、Googleで“DEA PDF”でDEAに関する論文を検索し、データが掲載されていて自分で興味を持って分析ができる場合、初めの一步にその分析を薦めていた。そこで彼はこのテーマを選んだ。上級演習を終え、卒業研究のテーマを話し合ったとき、引き続きこれをテーマとしたいという。4月中旬に大手私鉄に就職が決まったので、石塚君のテーマを引き継いで本稿で述べた統計分析等で拡充してはどうかとアドバイスしたが、自分で別途追加したい変数があるという。そこで上級演習で扱った3入力1出力をモデル1とし、追加した変数のモデルをモデル2、モデル3と発展させていくことにした。ただ、変数の違いで何が問題かは、その分野の専門家でないとなかなか難しいことは釘を刺した。学生は、結果の解釈は専門知識がないことを踏まえて、取り上げる問題に注意する必要がある。私自身も、専門家でないので、自信のないことは本書で説明していない。

モデル1は、伊東らの結果とゼミで学習した「Inverted DEAモデル」と「一入力固定改善法」を使い、「経営効率性」の観点から国管理および共用空港の26空港を評価する。入出力項目として、国土交通省が公表している「平成18年度空港別収支の試算結果について」をもとに、入力項目を「人件費(十億円)」、「人件費を除く営業費用(百億円)」、「負債(千億円)」とし、出力項目を「営業利益(百億円)」とする3入力1出力による経営効率性の評価である。さらに、今回自分なりに同じ年度の「空港の面積(千ha)」、「滑走路の長さ(km)」、「運用時間(十時間)」といった空港の規模と利用状況といった3変数を加えた、6入力1出力の分析をモデル2とした。その分析結果をゼミで検討し終えたのは12月ごろなので、更にモデルを発展させるように指導した。そこで出てきたのが、出力に空港の規模に対応した着陸収入、旅客数、貨物数の3出力を加えた6入力4出力のモデル3である。ラグビーの試合による2回目の負傷で手術入院していた東京医科歯科大学に、PCを持ち込み分析を行った。そして「ほとんどがDEA効率的になって、どうしましょう」とメールしてきた。自分で対策を考えさせ、1月になってモデル3からモデル1で検討した変数を省いてモデル4とし分析することにした。すなわち変数を増やしていくと、その変数で効率性がよくなりCCRモデルのSCOREが1になるものが増えていく。そこで、目的別にモデルを分けたわけである。ただし、各評価対象が多くの変数で特異的に評価され、ほぼ全てが1になれば、その特異的な変数と評価対象の組み合わせを検討することも将来考えられる。すなわち個人でも、良いところを見つけて褒めることは薦められている。

#### 3.1 モデル1の分析結果

### (1) 効率値の検討

表3.1がモデル1の結果であり、効率値は $0.07 \leq \text{SCORE} \leq 1$ と $1 \leq \text{SCORE2} \leq 14.16$ になる。電力会社や東京都の区立図書館等のこれまでの結果と異なり、空港の格差がさらに大きい。この理由をまずゼミの課題として取り上げた。得られた結論は次の通りである。

- 1) 空港はどの空港経営でも乗降客数、貨物、空港テナント料と同じ商品を扱っていて、他産業より経営環境は同質であろう。しかし、立地環境で雪や台風等の影響を受け欠航が多い等の空港もある。
- 2) 規模の経済が働き東京と大阪が効率的になるのは分かるが、小松がDEA効率的になる理由を次の課題とした。CCRモデルの多くの論文で、「CCRモデルは規模の経済で収益逡減が働く」とステレオタイプな説明が多い。
- 3) 次の週、「空港は国管理、民間企業に移行した空港、自衛隊と共用空港等があり、小松は美保空港、徳島空港、三沢空港と同じ共用空港であるため建設費等が安くて済む。そのため、4つの共用空港全ての負債は0.001ととても少ない。しかし、小松空港の負債にかかっている重みは990.10と2番目に大きく重みのかかっている徳島空港の0.93に比べて圧倒的に大きい。更に、営業利益が他の共用空港と比べて高いのに（2番目の徳島は0.049、小松は0.143）、負債は同じ0.001である。そのため、効率値を大きくするために990.10という大きな重みが負債にかかっているのだろう。
- 4) それに加えて、小松空港は小松市・金沢市・福井市をはじめ、石川県南部（加賀地方）及び福井県北部（嶺北地方）へのアクセス拠点になっているため、効率的な運営ができているのだろう」と、まだ旅行したことのない石川と福井の地図や情報を調べて報告があった。
- 5) 一方、羽田空港の両効率値が1と特異的になった。すなわち、CCRモデルで効率的でありながら、Inverted DEAでは最も非効率である。この問題は、2012年に「学生の成績データ」で筆者は初めて経験している。

本データは、SPSS, SAS, JMP(新村、2004)の統計の解説書とSpringerの書籍(Shinmura, 2016)で判別分析の重大な問題1の説明に用いている。得点を出力とし、勉強時間、飲酒日数、支出を入力とする3入力1出力モデルである。100点でなく85点を取った学生2名と、60点の学生がこれに該当する。100点の学生の勉強時間が12時間と9時間に対して、6名の60点の学生のうち2名が1時間しか勉強していない。いわゆる地頭が良くして授業中で最低限の事を理解しているのであろう。この2名は同じDEAクラスターで他の比較する学生がいないので、Inverted DEAで1になっていると結論付けた。空間的にうまく表現できないが、両効率フロンティアの端点でもあろうと考えて保留しておいた。

4章の鉄道会社の分析でも、JR東海の両効率値が1になる。2014年度の卒業ゼミのテーマとして、この理由の解明を第1目標にした。鉄道会社は、JR東海は経営的に他社より圧倒的に有意な点があり、両効率値が1になった。羽田空港の場合は、負債が他空港に比べて異常に大きく、1入力固定改善法でもこの事実が確認された。各空港の潜在利用者数の違いが、負債の大きな違いであり、羽田が群を抜いているので、CCRモデルでSCOREが1になる空港であるが、Inverted

DEAでは、他の空港が負債で全く追従できず、羽田が特異的になった。そして、このような両効率値が1になるものは、CCRによるフロンティアとInverted DEAの交差点になることがイメージ的に分かった。

表3.1 効率値

	空港名	人件費	営業費用	負債	営業利益	SCORE	SCORE2	G
1	東京	1.615	5.135	<b>8.978</b>	5.095	1.00	1.00	B
2	大阪	0.693	1.041	0.011	1.544	1.00	<b>14.16</b>	A
3	新千歳	0.700	0.714	0.013	0.951	0.90	<b>12.63</b>	C
4	福岡	0.722	1.672	0.013	1.073	0.60	<b>6.13</b>	C
5	那覇	0.598	0.826	0.012	0.339	0.28	3.91	C
6	稚内	0.100	0.096	0.002	0.010	0.07	1.00	D
7	釧路	0.177	0.202	0.003	0.038	0.13	1.79	C
8	函館	0.139	0.213	0.003	0.090	0.29	4.01	C
9	仙台	0.319	0.247	0.006	0.181	0.49	<b>5.55</b>	C
10	新潟	0.135	0.288	0.008	0.071	0.22	2.24	C
11	広島	0.161	0.204	0.003	0.175	0.58	<b>8.19</b>	C
12	高松	0.086	0.117	0.002	0.075	0.43	<b>6.15</b>	C
13	松山	0.120	0.142	0.002	0.128	0.61	<b>8.65</b>	C
14	高知	0.139	0.125	0.002	0.063	0.34	4.54	C
15	北九州	0.162	0.212	0.003	0.075	0.24	3.39	C
16	長崎	0.119	0.144	0.002	0.134	0.63	<b>8.91</b>	C
17	熊本	0.140	0.126	0.003	0.159	0.85	<b>11.12</b>	C
18	大分	0.102	0.136	0.002	0.096	0.48	<b>6.75</b>	C
19	宮崎	0.127	0.189	0.002	0.147	0.53	<b>7.44</b>	C
20	鹿児島	0.399	0.180	0.008	0.241	0.90	<b>5.87</b>	C
21	八尾	0.049	0.059	0.001	0.011	0.12	1.71	C
22	丘珠	0.052	0.054	0.001	0.006	0.08	1.07	C
23	小松(共)	0.039	0.250	<b>0.001</b>	<b>0.143</b>	1.00	<b>5.46</b>	A
24	美保(共)	0.048	0.084	<b>0.001</b>	0.023	0.21	2.64	C
25	徳島(共)	0.032	0.095	<b>0.001</b>	0.049	0.58	4.93	C
26	三沢(共)	0.055	0.027	<b>0.001</b>	0.016	0.38	2.80	C

(2) DEAクラスター

表3.2はDEAクラスターである。東京はDEAクラスター1 (DC1) に含まれ、東京と小松を手本とするが、構成員は東京だけである。すなわち、東京と比較する劣った空港がないのでSCORE2が1になる。もし劣った空港があれば、SCORE2はその空港と比較して1より大きくなる。大阪はDC2の唯一の構成員で大阪と小松を手本としているが、両効率値は1でない。これは、大阪のみ

を手本とするDC3には18空港が含まれて、大阪のSCORE2は1より大きくなる。また、DC2とDC3は互いに隣接していることが分かる。表3.3から、S6の稚内、S21の八尾、S22の丘珠空港が1になり、これと比較して大阪のSCORE2は14.16になることが分かる。

表 3.2 DEA クラスタ

DEA クラスタ	手本	個数	構成
DEA クラスタ1	東京と小松	1	S1
DEA クラスタ2	大阪と小松	1	S2
DEA クラスタ3	大阪	18	S3, S5-S7, S9, S11-S22, S26
DEA クラスタ4	東京と大阪と小松	5	S4, S8, S10, S24, S25
DEA クラスタ5	小松	1	S23

### 3.2 新しい変数の追加(モデル2)

#### (1) 両効率値

論文掲載のデータの他に、入出力項目として国土交通省が公表している「平成18年度空港別収支の試算結果について[46]」をもとに、「空港の面積(面積, 千ha)」、「滑走路の長さ(滑計, m)」、「運用時間(運計, 十時間)」を加えた6入力1出力による経営効率性を評価する。財務的なものの他に空港の規模に関わる入力変数を増やした。出力変数として乗客数と貨物数等も集めていたが、入出力変数が増えると比の作成個数が増えるので手を抜きたいのかと内心想ったが、本人は解釈の容易さのためだというので意思を尊重した。表3.3がその結果である。効率値は、 $0.07 \leq \text{SCORE} \leq 1$  と  $1 \leq \text{SCORE2} \leq 14.16$  と、区立図書館以上に違いが大きい。これは、地方の港湾が釣り堀になっている例と比較した。確かに、地方空港で経営が困難なところもあるが、住民の他地域へのアクセスという点があり、効率性だけで論じられない。この問題は、ゼミの範囲を超えるので、問題意識だけを記憶にとどめることにした。東京、大阪、小松の他に福岡がDEA効率的になった。そして東京だけが両効率値が1と変わらない。2014年度から、両効率値でもって分析対象を4グループに分けて、一元配置の分散分析でp\*q個の1入力1モデルの比を分析することを課した。彼は1年次に「統計入門」を石塚君と受講していた。140人ほどの受講生の中で、前列に体格がよくて日焼けした2人が並んで座っていたので、記憶があった。ゼミに入ってくるときに、統計入門の成績を調べたが普通である。しかし、統計入門で教えていない一元配置の分散分析をJMPで説明するとすぐに理解した。江頭さんと黒岩さんに統計分析を課さなかった。彼らのように教師の言うことを反論しないでそのまま頑張りすぎることを心配したためである。池田君と石塚君は、成蹊大学で一番練習量の多いラグビー部の主将と主務なので、簡単につぶれないと考えた。4群は、両効率値が1になるものをD, Inverted DEAで非効率値が1より大きいものをA, CCRモデルで1以下でInverted DEAが1より大きいものをC, それ以外をBとする。これらのグループで、比の違いを検討するわけである。すでにSCOREとSCORE2による目印があるので、解釈しやすいし、専門家でなくても大きな間違った結果を出さないであろう。東京は両効率値が1であり、唯一Dの特異的な空港である。大阪は、CCRモデルで1であり、Inverted DEAでSCORE2が14.16と一番大きくAで手本になる。新千歳はCで、表3.4で大阪の

DEAクラスターに含まれ、大阪に抑えられて効率値は0.9であるが、SCORE2は12.62と2番目に大きい。福岡はAで、那覇はCで、DEAクラスチャーには1つしか含まれないが、東京と大阪を含む他のクラスターに隣接しているのでこの結果になった。

表3.3 6入力1出力モデルの効率値

	空港名	面積	滑計	運計	人件費	営業費用	負債	営業利益	SCORE	SCORE2	G
1	東京	1.271	8.500	2.400	1.615	5.135	8.978	5.095	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	D
2	大阪	0.311	4.800	1.400	0.693	1.041	0.011	1.544	1.00	<b>14.16</b>	A
3	新千歳	0.719	6.000	2.400	0.700	0.714	0.013	0.951	0.90	12.62	C
4	福岡	0.353	2.800	1.500	0.722	1.672	0.013	1.073	1.00	6.13	A
5	那覇	0.327	3.000	2.400	0.598	0.826	0.012	0.339	0.34	3.91	C
6	稚内	0.096	2.000	1.400	0.100	0.096	0.002	0.010	0.07	1.00	D
7	釧路	0.160	2.500	1.300	0.177	0.202	0.003	0.038	0.13	1.79	C
8	函館	0.164	3.000	1.300	0.139	0.213	0.003	0.090	0.29	4.01	C
9	仙台	0.239	4.200	1.400	0.319	0.247	0.006	0.181	0.49	5.55	C
10	新潟	0.197	3.800	1.300	0.135	0.288	0.008	0.071	0.22	2.24	C
11	広島	0.198	3.000	1.400	0.161	0.204	0.003	0.175	0.58	8.19	C
12	高松	0.154	2.500	1.400	0.086	0.117	0.002	0.075	0.43	5.99	C
13	松山	0.135	2.500	1.400	0.120	0.142	0.002	0.128	0.61	8.65	C
14	高知	0.141	2.500	1.400	0.139	0.125	0.002	0.063	0.34	4.49	C
15	北九州	0.159	2.500	2.400	0.162	0.212	0.003	0.075	0.24	3.39	C
16	長崎	0.200	4.200	1.500	0.119	0.144	0.002	0.134	0.63	7.88	C
17	熊本	0.150	3.000	1.400	0.140	0.126	0.003	0.159	0.85	10.81	C
18	大分	0.148	3.000	1.400	0.102	0.136	0.002	0.096	0.48	6.68	C
19	宮崎	0.177	2.500	1.400	0.127	0.189	0.002	0.147	0.53	7.44	C
20	鹿児島	0.182	3.000	1.400	0.399	0.180	0.008	0.241	0.90	5.87	C
21	八尾	0.070	2.700	1.150	0.049	0.059	0.001	0.011	0.12	1.00	D
22	丘珠	0.103	1.500	1.300	0.052	0.054	0.001	0.006	0.08	1.00	D
23	小松(共)	0.448	2.700	1.400	0.039	0.250	0.001	0.143	1.00	5.12	A
24	美保(共)	0.235	2.000	1.500	0.048	0.084	0.001	0.023	0.21	1.66	C
25	徳島(共)	0.191	2.000	1.350	0.032	0.095	0.001	0.049	0.58	4.33	C
26	三沢(共)	0.010	3.000	1.150	0.055	0.027	0.001	0.016	0.38	1.33	C

(2) DEAクラスター

表3.4はDEAクラスターである。DC2に大阪を含む18空港が含まれ、大阪が手本になる。大阪は東京と異なり、日本の多くの空港の手本であるようだ。DC3には那覇空港だけが含まれる。DC5には小松を含む5空港が含まれている。DEAクラスターから、ある程度特徴ある空港が別のクラスターになっていることが分かる。

表3.4 DEAクラスター

DEA クラスター	手本	個数	構成
DC1	東京と大阪	1	S1
DC2	大阪	18	S2, S3, S6, S7, S9, S11-S22, S26
DC3	東京と福岡	1	S4(福岡)
DC4	東京と大阪と福岡	1	S5(那覇)
DC5	東京と大阪と小松	5	S8, S10, S23, S24, S25

### 3.3 出力変数を追加(モデル3)

#### (1) 両効率値

モデル2で追加した3変数の「空港の面積」, 「滑走路の長さ」, 「運用時間」の他に, 出力項目として追加した入力に対応した3出力の「着陸収入」, 「利用者数(千万人)」, 「貨物取扱量(十万トン)」を加えて6入力4出力による経営効率性を評価する. 表3.5は両効率値で, 範囲は $0.21 \leq \text{SCORE} \leq 1$  で  $1 \leq \text{SCORE2} \leq 4.79$  になった. 12空港がDEA効率的になった. 両効率値が1になるのは東京空港だけであるが, SCORE2が最大になるのは4.47の大阪の代わりに大分空港が4.79になった. 明らかに大分が空港の規模が小さいので大きな大阪に代わってSCORE2が最大になった.

表3.5 両効率値

SN	面積	滑計	運計	人件 費	営業 費用	負債	営業 利益	着陸 収入	利用 者数	貨物 計	SCORE	SCORE2	G
1	1.27	8.5	2.4	1.62	5.14	8.98	5.10	3.83	6.69	7.07	1	1	B
2	0.31	4.8	1.4	0.69	1.04	0.01	1.54	1.38	1.68	1.42	1	4.47	A
3	0.72	6	2.4	0.70	0.71	0.01	0.95	0.88	1.85	2.18	1	4.63	A
4	0.35	2.8	1.5	0.72	1.67	0.01	1.07	0.85	1.81	2.62	1	3.96	A
5	0.33	3	2.4	0.60	0.83	0.01	0.34	0.23	1.45	1.81	1	3.37	A
6	0.10	2	1.4	0.10	0.10	0.00	0.01	0.01	0.02	0.01	1	2.33	A
7	0.16	2.5	1.3	0.18	0.20	0.00	0.04	0.04	0.09	0.06	0.99	4.73	C
8	0.16	3	1.3	0.14	0.21	0.00	0.09	0.08	0.20	0.17	0.97	4.55	C
9	0.24	4.2	1.4	0.32	0.25	0.01	0.18	0.16	0.34	0.19	0.93	4.41	C
10	0.20	3.8	1.3	0.14	0.29	0.01	0.07	0.06	0.13	0.03	0.84	3.83	C
11	0.20	3	1.4	0.16	0.20	0.00	0.18	0.16	0.33	0.26	0.99	4.65	C
12	0.15	2.5	1.4	0.09	0.12	0.00	0.08	0.07	0.15	0.13	0.98	4.62	C
13	0.14	2.5	1.4	0.12	0.14	0.00	0.13	0.11	0.28	0.11	0.98	4.45	C
14	0.14	2.5	1.4	0.14	0.13	0.00	0.06	0.05	0.15	0.05	0.91	4.21	C
15	0.16	2.5	2.4	0.16	0.21	0.00	0.08	0.07	0.13	0.05	0.92	4.41	C
16	0.20	4.2	1.5	0.12	0.14	0.00	0.13	0.13	0.27	0.18	1	4.64	A

17	0.15	3	1.4	0.14	0.13	0.00	0.16	0.15	0.32	0.31	1	4.71	A
18	0.15	3	1.4	0.10	0.14	0.00	0.10	0.09	0.19	0.14	1	<b>4.79</b>	A
19	0.18	2.5	1.4	0.13	0.19	0.00	0.15	0.13	0.31	0.14	0.98	4.44	C
20	0.18	3	1.4	0.40	0.18	0.01	0.24	0.23	0.57	0.41	1	4.74	A
21	0.07	2.7	1.2	0.05	0.06	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	<b>0.21</b>	1	D
22	0.10	1.5	1.3	0.05	0.05	0.00	0.01	0.00	0.04	0.00	1	1.26	A
23	0.45	2.7	1.4	0.04	0.25	0.00	0.14	0.13	0.26	0.24	1	4.59	A
24	0.24	2	1.5	0.05	0.08	0.00	0.02	0.02	0.05	0.02	0.93	2.89	C
25	0.19	2	1.4	0.03	0.10	0.00	0.05	0.04	0.09	0.04	0.88	4.04	C
26	0.01	3	1.2	0.06	0.03	0.00	0.02	0.01	0.03	0.01	0.97	4.55	C

(2) DEAクラスター

CCRモデルでSCOREが1となった空港が12で、最大で255 (=2の12乗-1) 通りのクラスターが出てくる可能性があるが、幸いにも23個のDEAクラスターであった。3個のDEAクラスターに含まれる空港は2空港であり、残り20空港は20個のDEAクラスターに細分されている事が分かる。今回の場合、このDEAクラスターの分析にあまり効果を感じない。しかし、小松空港(DEA21)だけが自分自身を手本として構成員も自身という特異な空港になった。なぜ特異的なのかを、次の週まで調べてくることを課した。数値から特異的に大きな値等を見つけ問題点を見つける。それを調べて翌週の討議のテーマとする繰り返しである。これは、全員参加型の改革改善に適した手法であることを示している。

表3.8 DEAクラスター

DEA クラスター	手本	個数	構成
DC1	1, 2, 3, 11	1	S1
DC2	2, 4, 11	1	S2
DC3	2, 3	1	S3
DC4	3, 4, 5	1	S4
DC5	3, 5, 20	1	S5
DC6	6, 22	1	S6
DC7	6, 17, 20	1	S7
DC8	3, 5, 17, 20	1	S8
DC9	18, 20	1	S9
DC10	6, 18, 20	2	S10, S24
DC11	3, 18, 23	1	S11
DC12	6, 17, 18, 20	1	S12
DC13	3, 5, 17, 23	2	S13, S19
DC14	5, 20, 22	1	S14
DC15	6, 18	2	S15, S21

DC16	5, 17, 18, 23	1	S16
DC17	3, 7, 20	1	S17
DC18	2, 3, 18, 23	1	S18
DC19	2, 20	1	S20
DC20	5, 6, 20, 22	1	S22
DC21	<b>23</b>	1	S23
DC22	5, 17, 123	1	S25
DC23	2, 5, 20	1	S26

### 3.4 モデル4

#### (1) 初めてのヘルプ・メッセージ

学生は一般的にいて、教えられたことの枠内で考えてしまう。特に分析系の理論であればなおさらである。現実に適用して、上手くいかなければ教えられたことを疑い、自分で試行錯誤するよう指導する必要がある。池田君が退院後の1月にどうすれば良いか打ち合わせた。もちろんすでに私は、モデル1に用いた3入力の変数を省いた空港の規模とその成果であるモデル4を分析してみて上手くいくことを確認済みである。もし事前の分析なしで、学生と議論すると間違った方向性を示すかしのれない。限られた時間制約で、学生が壁にぶち当たって挫折してしまうことに気をつけなければいけない。

#### (2) 両効率値

モデル2で追加した3変数の「空港の面積」, 「滑走路の長さ」, 「運用時間」を3入力とし、出力項目として「営業利益」, 「利用者数(千万人)」, 「貨物取扱量(十万トン)」を加えて3入力3出力による経営効率性を評価する。ただし、八尾空港は遊覧飛行が中心であり丘珠空港とともに貨物の扱いがないので省いて24空港で分析する。表6.9は両効率値で、 $0.04 \leq \text{SCORE} \leq 1$ で $1 \leq \text{SCORE2} \leq 24.73$ になった。DEA効率的な東京、大阪、福岡の3空港はSCORE2も23.77以上で4位の鹿児島島の12.99より大きい。SCORE2が1の稚内、三保、三沢の3空港は非効率であることは常識に合致する。負債を省いているため、両効率値が1になる空港はなく、残り18空港の評価も妥当である。

表 3.9 両効率値

SN	空港名	面積	滑計	運計	営業利益	利用者数	貨物計	SORE	SCORE2	G
1	東京	1.271	8.5	2.4	5.095	6.688	7.067	1	<b>24.73</b>	a
2	大阪	0.311	4.8	1.4	1.544	1.684	1.42	1	23.77	a
3	新千歳	0.719	6	2.4	0.951	1.854	2.184	0.49	12.12	c
4	福岡	0.353	2.8	1.5	1.073	1.812	2.619	1	24.13	a
5	那覇	0.327	3	2.4	0.339	1.45	1.806	0.85	10.51	c
6	稚内	0.096	2	1.4	0.01	0.023	0.005	0.04	1	d
7	釧路	0.16	2.5	1.3	0.038	0.088	0.06	0.1	2.34	c
8	函館	0.164	3	1.3	0.09	0.201	0.171	0.23	5.236	c

9	仙台	0.239	4.2	1.4	0.181	0.339	0.186	0.26	6.101	c
10	新潟	0.197	3.8	1.3	0.071	0.126	0.025	0.12	2.437	c
11	広島	0.198	3	1.4	0.175	0.334	0.258	0.31	7.424	c
12	高松	0.154	2.5	1.4	0.075	0.152	0.129	0.18	4.299	c
13	松山	0.135	2.5	1.4	0.128	0.275	0.105	0.38	8.685	c
14	高知	0.141	2.5	1.4	0.063	0.149	0.047	0.2	4.356	c
15	北九州	0.159	2.5	2.4	0.075	0.127	0.048	0.15	3.221	c
16	長崎	0.2	4.2	1.5	0.134	0.267	0.182	0.25	5.531	c
17	熊本	0.15	3	1.4	0.159	0.317	0.306	0.39	8.888	c
18	大分	0.148	3	1.4	0.096	0.188	0.14	0.23	5.329	c
19	宮崎	0.177	2.5	1.4	0.147	0.308	0.143	0.32	7.734	c
20	鹿児島	0.182	3	1.4	0.241	0.571	0.412	0.58	12.99	c
23	小松(共)	0.448	2.7	1.4	0.143	0.256	0.244	0.12	2.686	c
24	美保(共)	0.235	2	1.5	0.023	0.05	0.017	0.04	1	d
25	徳島(共)	0.191	2	1.4	0.049	0.087	0.04	0.09	2.099	c
26	三沢(共)	0.01	3	1.2	0.016	0.032	0.009	0.59	1	d

図 3.1 は SCORE と SCORE2 の散布図である。ほぼ対角線上に並び、SCORE が 1 の 3 空港は大きな SCORE2 の値を取っている。3 は札幌、5 は那覇、20 は鹿児島と JR 等の他輸送機関と競合が少なく、観光地でもある。これ以外の 18 空港はほぼ直線上にあり、経営効率のランキングを表していると考えてよいであろう。5 の那覇と 26 の三沢が、直線からはるか離れて下にくる。那覇は、鉄道などとの競合がなく、観光客が主体の他空港とは異なっている。三沢は、4 共有空港の一つであるが検討はしていない。

以上のように、CCR モデルによる効率値単独で経営効率を考えるのではなく、

- 1) DEA クラスタで非効率な分析対象は、どの空港を手本とするか、
- 2) Inverted DEA で、SCORE2 が最大の評価対象を手本として、1 入力固定改善法でどこを改善すべきか考える。ただし空港経営では紙面の都合で省力した。
- 3) CCR モデルと Inverted DEA で、分析対象を 4 群に分けて  $p \times q$  個の 1 入力 1 出力の比の一元配置で検討する。また、主成分分析やクラスタ分析を行う。
- 4) 本章では、SCORE2 を SCORE で単回帰した検討を行った。



な効率的でない空港といえる.

表3.10 因子負荷量

列 1	主成分 1	主成分 2	象限
面積	0.87	-0.21	4
滑計	0.82	-0.19	4
運計	0.55	-0.18	4
人件費	0.94	-0.28	4
営業費用	0.89	-0.43	4
負債	0.72	-0.55	4
営業利益	0.90	-0.38	4
着陸収入	0.92	-0.34	4
利用者数	0.93	-0.35	4
貨物計	0.92	-0.35	4
SCORE	0.70	0.60	1
SCORE2	0.32	0.73	1
営業/面積	0.86	0.02	1
営業/滑計	0.96	-0.19	4
営業/運計	0.93	-0.28	4
営業/人権	0.74	0.34	1
営業/営業	0.61	0.55	1
営業/負債	0.34	0.84	1
着陸/面積	0.82	0.09	1
着陸/滑計	0.96	-0.13	4
着陸/運計	0.94	-0.22	4
着陸/人権	0.68	0.44	1
着陸/着陸	0.53	0.60	1
着陸/負債	0.33	0.86	1
利用/面積	0.84	0.08	1
利用/滑計	0.92	-0.13	4
利用/運計	0.97	-0.25	4
利用/人権	0.62	0.49	1
利用/利用	0.40	0.58	1
利用/負債	0.26	0.90	1
貨物/面積	0.84	0.04	1
貨物/滑計	0.85	-0.12	4
貨物/運計	0.95	-0.26	4

貨物/人権	0.73	0.38	1
貨物/貨物	0.59	0.50	1
貨物/負債	0.42	0.75	1

### 3.6 まとめ

本章では、2014年度卒業生のラグビー部主将の池田君のゼミレポートを紹介した。2011年以前は、統計ソフトを用いて自分でテーマを決めてデータを集めて20頁以上の統計レポートを課していた。これに比べて、DEA法による企業評価は、社会を知らない学生に就活と企業人になってからの物の見方と考え方を議論できる。また現在、多くの大学で取り上げる「問題解決学」は私が28歳の企業人であったころから取り組んできた統計ソフトのSASや数理計画法のLINDOの日本社会への普及の評語であり次の主張であった。

- 1) 統計は、分析対象がデータで表された場合の問題が容易に解決できる。数理計画法は、分析対象が数式で表される問題が容易に解決できる。
- 2) これらの2分野は便利で高機能な分析ソフトを使うことで、統計や数理計画法の研究者養成の教育とは別の高度なユーザー教育を独立させるべきである。

しかし大学教員からは、分析系のソフトを使った教育は「たたき大工の教育」と揶揄されたこともあった。確かに分析系ソフトのメニューのクリック操作を教えていれば揶揄されても仕方がない。しかし自分でテーマを決め、分析を行い、結論を導き、レポートにまとめる、ということをして「高度なユーザー教育」といつている。ICT教育で例えばExcelを取り上げたとしても、単に部分的な機能を教えただけにとどまってはいけなないと考える。

- 1) 10件掛ける2変数ぐらいの数値データを入力させ、
- 2) 2変数の相関を求める計算式をExcelの関数を用いなくて求め、
- 3) 別のデータにも簡単に適用できる

ような課題でも学生は実に種々のレベルで壁にぶち当たる。

- 4) まず数値と文字の違いを踏まえて正しく入力できない、あるいは入力できたとしても企業の資本金等の単位を考えず円で入力する学生がいる。
- 5) 相関係数は、単に四則演算だけであるが、相対参照と絶対参照の使い分けができないとパニックになる。一度10件で作成してしまえば、別の件数の異なるデータに使い回しができるということを教えないという意外な盲点がある。

6) そして、散布図に回帰式を書き込み、それらをWordやPowerPointに貼り付けレポートや発表資料を作るという一つの作業を完結させることが重要と考える。

7) その上で、Excelでは大量の同じ作業をやる場合、作業量は比例するが、便利な統計ソフトを使えば少ない分析でも大量の分析でもほぼ作業量は変わらないことを教えるべきである。

しかし、「問題解決型の授業」を教える場合、教員自身がそれを実践している姿を示す必要がある。幸いにも1章で述べた通りDEA法を現実に適用した場合に種々の問題があり、『数理計画法による問題解決法』に紹介した内容に5個の改善点を付け加えていった。2012年度と2013年度の卒業ゼミで修正改良を行って完成した。2014年度は、ラグビー部員であり性格を見極めた

上で, DEA 法の分析結果を統計分析で評価することを課した. DEA 法はデータを集めさえすれば, 筆者が LINGO で作成した汎用モデルを流せば, すぐに効率的な企業と非効率な企業が表示される. それでレポートを作成させれば, 学生は DEA 法を盲信し企業でその通り行い現状に合わないで挫折するであろう. これを避ける意味で, 学生がテーマを決めてデータを集め終わった後, データを提出させ筆者が先回りして分析しゼミに望んだ. ある場合, 学生の間違った方向でやらせ, 修正を繰り返した. あまり公言すべきではないが, インターネット上に公開されている DEA 法の論文に比べても, そんな色ないできである.

2014 年の 11 月 26 日から『最適線形判別関数 (新村、2010)』に関する 2014 年以降に発表した英語論文 3 編を中心に世界的な研究者 DB の Research Gate を通して世界に情報発信することにした. 2017 年 9 月時点で 6000 ダウンロード数を越え、引用文献数は 1224 件である. このような単純な評価数値が分かるだけでも研究に役立つ. まず数値で分かることで問題を解決することを習慣付ける必要がある.

筆者は大学の研究費の評価にも DEA 法を用いれば, 不正な預け金の額もある程度分析できると考えている. 使用したと申告された研究費を入力とし, 研究成果を出力として分析すればよい. ただし, 似たような分野ごとで考える必要があろう. 同じ研究分野では, ある程度研究成果に応じて研究費がかかる. もし優秀とみなされている研究者の効率値が小さければ, 研究費の無駄づかいが預け金と考えても良いであろう.

## 第4章 鉄道18社の分析

2013年の上級演習で石塚君は大手鉄道会社18社をDEA法で営業効率性の比較を行った。彼は杉山(2010)が鉄道会社の時系列的な分析を行っているのを見つけたが、学生のテーマとしてデータ収集など荷が重いので自分なりに身の丈に合ったこのテーマを決めたようだ。すなわち、初めから自分でデータを集めることにした。この時点では、就職先を決めていなかったののでこのテーマを選んだと思われる。同じラグビー部主将の池田君は私鉄大手に就職したので、補佐役の主務の彼とは良いコンビネーションといえる。両名は、1年次の統計入門の受講生であるが、2年次以降のデータ分析の統計関連の授業は受講していない。しかし、上級演習受講生に対する筆者の希望を守り両君は「推測統計」と「経営科学」を受講してくれた。決して統計入門の成績は良くないので、「なぜ私のゼミを受講するの?」と聞くと、「ラグビーに時間を割きたいので、先生の科目を複数受講すれば、内容に関連があつて少ない勉強時間で済む」とのことである。「なるほど正しい」と感じたが、ラグビーに熱中し、ゼミをさぼることを覚悟していた。しかし、両名とも私の授業は欠席がなく、卒業ゼミは隔週だが、「単位をほぼ取ってあるので、試合以外は毎回やってほしい」と4年次の最初に申し出てきたて驚いた。

これに対して、他のゼミ生は上級演習のみの受講で2年次まで筆者の授業を受けていない。その中のI君は、テーマとして「携帯電話の評価」を選んだ。暫くして「データを集めにくい」というので、例えば「PCのようにカタログに必要な情報が全て載っているものに変更を勧めた」が、その内に出席しなくなった。メールで出席を促したが、なしのつぶてである。この反省を踏まえ、DEA法は企業評価だけでなく製品評価等の種々の評価に適用できるという筆者の指導は間違っていると考えるようになった。そこで2014年の上級演習以降は、就職希望業種の企業評価を扱うように指導するようになった。

彼は卒業研究では、就職先を電力あるいはエネルギー関連に的を絞り、「電力会社10社の経営効率性の分析」をテーマに決めた。筆者の「分析は比較評価が重要」という注意を守り、東京電力(株)の原発事故に注目し、その前後の2010年と2012年の比較を行なっている。着想は非常に良いのだが、上級演習に比べ難渋している。就職希望業種に就職できなかった場合は、ガソリンスタンドのバイト先の社長に採用してもらおう約束をとったとのことであるが無事に4年の授業開講前に就職先を決めた。ラグビーに疲れているのかゼミでは居眠りが多いのは、これだけが理由でないことを5章で述べる。

### 4.1 鉄道会社18社のDEA法による分析

上級演習で対象にした鉄道会社は、JR本州3社(JR東日本、JR西日本、JR東海)、私鉄15社(東武鉄道、西武鉄道、京成電鉄、京王電鉄、東京急行電鉄(東急)、小田急電鉄(小田急)、京浜急行電鉄、相模鉄道、名古屋鉄道、近畿日本鉄道(近鉄)、南海電気鉄道(南海)、京阪電気鉄道(京阪)、阪急電鉄(阪急)、阪神電気鉄道(阪神)、西日本鉄道)である。データは平成12年度の「鉄道統計年報」を用い、入力と出力から効率性を分析するDEA法で各鉄道会社の効率性を比較した。入力変数は営業キロ(千km)、従業員数(万人)、車両台数(万両)、営業費用(兆円)で、出力変

数は、旅客輸送人キロ(億人キロ)、旅客運輸収入(兆円)である。

この4入力2出力のデータとCCRモデルで求めたDEA効率値( $0.766 \leq \text{SCORE} \leq 1$ )とInverted DEAのDEA非効率値( $1 \leq \text{SCORE2} \leq 1.214$ )を表4.1に示す。空港や区立図書館より両効率値とも範囲が狭いので、際立って良い企業や悪い企業がこの時点ではないと考えた。入出力変数を、各変数の最大値が0~1の範囲になるよう単位変換してある。これで得られた重みの解釈と比較が容易になる点と、数理計画法は膨大な繰り返し計算が行われデータの最大値と最小値の比が大きいと計算上のトラブルを起こすという筆者の経験を元にこの点を指導している(改善点2)。また、SCOREとSCORE2の組み合わせでaからcに4分類して、一元配置の分散分析(改善点5)に用いる。

表 4.1 大手鉄道のデータと DEA 効率値と DEA 非効率値

SN	事業体名	営業 キロ	従業 員数	車両 台数	営業 費用	旅客輸送 人キロ	旅客運 輸収入	SCORE	SCORE2	G
1	東武鉄道	0.463	0.707	0.195	0.123	0.130	0.144	0.937	1.096	c
2	西武鉄道	0.177	0.352	0.124	0.084	0.088	0.092	0.880	1.052	c
3	京成電鉄	0.102	0.210	0.051	0.045	0.035	0.049	0.844	1.068	c
4	京王電鉄	0.085	0.235	0.084	0.060	0.069	0.072	0.996	<b>1.174</b>	c
5	東京急行電鉄	0.102	0.311	0.110	0.096	0.089	0.114	1.000	<b>1.167</b>	a
6	小田急電鉄	0.121	0.352	0.104	0.086	0.104	0.107	1.000	<b>1.214</b>	a
7	京浜急行電鉄	0.087	0.239	0.076	0.058	0.061	0.070	0.964	1.171	c
8	相模鉄道	0.036	0.114	0.044	0.028	0.027	0.032	0.946	1.104	c
9	名古屋鉄道	0.533	0.430	0.121	0.074	0.064	0.080	0.842	1.000	d
10	近畿日本鉄道	0.594	0.991	0.208	0.159	0.132	0.175	0.856	1.000	d
11	南海電気鉄道	0.172	0.312	0.072	0.058	0.043	0.060	0.809	1.000	d
12	京阪電気鉄道	0.088	0.252	0.076	0.048	0.046	0.055	0.909	1.088	c
13	阪急電鉄	0.147	0.332	0.132	0.085	0.093	0.097	0.944	1.092	c
14	阪神電気鉄道	0.045	0.123	0.031	0.024	0.018	0.025	0.816	1.000	d
15	西日本鉄道	0.116	0.103	0.037	0.022	0.019	0.023	0.827	1.000	d
16	JR 東日本鉄道	7.538	6.082	1.250	1.573	1.253	1.681	0.885	1.073	c
17	JR 東海鉄道	1.978	2.092	0.335	0.775	0.487	1.041	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	b
18	JR 西日本鉄道	5.078	3.811	0.638	0.776	0.526	0.773	<b>0.766</b>	1.000	d

CCRモデルの分析でDEA効率になったのは東急、小田急、JR東海の3社で、0.766の西日本が最も非効率である。DEA法ではこれらの3社を手本に改善することを提案している。しかし、具体的な改善目標の決定とどれ位の改善を行えば良いかがわからない。そこで、筆者は表4.2のクロス効率値から表4.3のDEAクラスター(改善点3)を提案した。2入力1出力あるいは1入力2出力モデルでは、2つの比の散布図で、改善目標の説明ができる。しかし比が3個以上あると、この散布図による説明ができない。そこでクロス効率値からSCOREが1の行だけを残し、18

社の重みの列で 1 になるパターンを見つけて表 4.3 にまとめることを DEA クラスタと呼んでいる。同じ DEA クラスタに属する評価対象は、当初その DEA クラスタと関連づけられた手本を参考にすればよいと考えた。しかし 3 社が手本になれば、最大 7 個の DEA クラスタができる。実際に改善活動を考えて場合、実際は 5 個しかないがそれでも 18 社が 5 個の DEA クラスタに分かれて改善活動するのは現実的でない。そこで注目したのが、**Inverted DEA 法**である（**改善点 4**）。筆者は当初逆 CCR 等と紹介してきたが、上田先生から山田ら(1994)や杉山(2010)が提案した手法であり、メールで同氏に筆者の不勉強をわびた。非効率値 (**SCORE2**) は小田急が 1.214 と一番大きい。CCR モデルは DEA 法の創始者が提案したモデルであり、多くの研究論文では必ず紹介されている。しかし、杉山氏のテキサス大学からのメールにも「若手の日本人の研究は評価されない」と指摘があるが、実は CCR モデルの欠点を補足する重要な手法である。ちなみにテキサス大学は CCR モデル誕生の大学である。

1) 改善活動は、原則まず SCORE2 が最大の小田急を手本にして行うべきである。その後で更に改善を行いたい場合、DEA クラスタを参考に改善目標を適宜選んで行えばよい。

2) DEA 効率的であった東急の SCORE2 は 1.167 であり、効率的でない京王電鉄の 1.174 より小さい。京王電鉄は、小田急に抑えられて CCR モデルで効率的にならなかった。これは CCR モデルの DEA 効率的な 3 社を手本にするという方針の欠点を示す。

3) JR 東海は、CCR モデルで DEA 効率的であり、Inverted DEA で非効率と判断された。2014 年以降のゼミの主要な関心事になった。一連の研究で色々な産業セクターでこのことが観測され、その意味付けに成功している。今回は JR 東海は他の鉄道会社に比べ、あまりにも経営環境が恵まれていて、他社の追従を許さないというのが上級演習での結論である。池田君は、**3 章**の「日本の空港 28 社」を選んだが、羽田空港がこれに該当する。負債があまりにも大きいことが原因である。

そこで、SCORE と SCORE2 で分析対象をグループ化することを考えた（**改善点 5**）。表 4.1 の G 列に示すように SCORE だけが 1 を a、両効率値が 1 で特異的なものを b、SCORE2 だけが 1 を d、それ以外を c と 4 分類した。ラグビー部員であっても、両君の記号は異なっている。分類 d は非効率な企業で、分類 c は一般的な企業と考えられる。そして、卒業研究では JMP (Sall, et al., 2004) を用いて、一元配置の分散分析のグラフ表現である層別箱ひげ図で検討する。また、クラスタ分析で 4 分類し、それを PCA で DEA 法の結果と比較評価することにした。統計手法は数値の大きなものを際立たせるが、入出力の数値が小さなものを注目しない欠点がある。DEA 法は比を用いていて総合化された比に注目するので、数値の小さなものも評価してくれる。

学生には DEA 法を社会人になって使う場合、事前に「業界トップ企業や看板事業部が選ばれないことがある」といって実施前に説明するよう指導している。例えば JR 東日本の各駅を評価した場合、東京駅や新宿駅が DEA 法で効率的にならず、思っても見ない規模の小さな駅が選ばれるかもしれない。そのなぜかを検討する出発点として DEA 法の結果を用い「ホワイトカラーの改善活動の道具になってくれれば良いが、事前に DEA 効率的の問題点を指摘しておかないと将来経営トップになる可能性が高い東京駅の駅長らにつぶされる可能性がある」ためである。同じこと

が、企業の事業部評価等を行った場合にも考えられる。看板事業部でなく、売り上げは少ないが利益率の高い弱小事業部が 1 になることは容易に想定される。総合化された経営資源の使用量と、その結果得られる総合化された経営成果の比を比べているためである。DEA 法は、あまり注目されない、それなりに頑張っている評価対象に光を当てる評価法でもある。

#### 4.2 クロス効率値と DEA クラスタ

表 4.2 はクロス効率値の出力で DEA 効率値が 1 になる DEA 効率的と判定された企業の行だけを示す。S1 列は、東武鉄道の重みで 18 社の効率値を求めた値である。この値が 1 以下に制約しているため、東武鉄道は小田急と JR 東海が先に 1 になるために 0.937 に押さえられる。DEA 法で東武鉄道を一番良く評価する重みを探したのに、その重みで小田急と JR 東海が先に 1 になるので、この 2 社に比べて経営資源を多く使っているか経営成果が出ていないことを示している。そして、この 2 社が入出力の値で優れているので、この 2 社を参考にして改善をすればよい。「1 入力固定改善法」は、改善すべき項目とその量が簡単に分かる。

表 4.2 クロス効率値の出力で DEA 効率値が 1 になるパターン

SN	事業体名	SCORE	S1	S4	S5	S6	S17
5	東京急行電鉄	1	0.929	1	1	1	0.884
6	小田急電鉄	1	1	1	0.796	1	0.924
17	JR 東海鉄道	1	1	0.916	0.473	1	1

表 4.3 は DEA クラスタである。作成法は簡単である。東武鉄道の重みでは、小田急と JR 東海が手本になることが分かった。残りの S2 から S18 列でこのパターンを示す表の 12 個が DEA クラスタ S1 の構成員である。これら 12 社は手本の小田急と JR 東海を参考に 1 入力固定改善法で改善点を探せばよい。結局 5 個の DEA クラスタに分かれた。しかし、それに含まれるのは 3 社と、1 社だけになる 3 個の DEA クラスタができた。この結果から、CCR モデルで DEA 効率的になるものが改善目標であるということは現実的でないことが自然と分かる (CCR モデルの欠点)。最初は、Inverted DEA で非効率値が一番大きな企業を手本に検討すべきである。その上で必要であれば、DEA クラスタを利用すればよい。

表 4.3 DEA クラスタ

	手本	数	構成員
S1	小田急, 東海	12	1-3, 7, 9-12, 14-16, 18
S4	東急, 小田急	3	4, 8, 13
S5	東急, 小田急	1	5
S6	小田急, 東急, 東海	1	6
S17	東海	1	17

#### 4.3 重みに関して

表 4.4 は CCR モデルと Inverted DEA の重みである。各変数を最大値を 1 以上 10 未満に変換したので、重みの比較が容易になる。多くの分析で、重みやクロス効率値の分析を十分に行っていないので今後の課題である。しかし入力で 0 になる重みに対応する入力変数は、原則他の入

力変数に比べて経営資源として使いすぎである。また複数の出力変数で 0 になる重みの変数は正になる出力変数に比べて原則経営成果が伴っていないことを解釈の基準にするよう指導した (改善点 6)。JR 東海を例とすれば、営業キロ数と従業員数と車両台数は営業費用と比較して多く使っていて、旅客輸送人キロ(人キロ)の方が旅客運輸収入(収入)より大きいことを示す。長距離旅客を高い単価で運営している結果と考えられる。これが、両効率値が 1 になる理由である。

右の 5 列の重みは Inverted DEA 法の重みである。東急、小田急、京浜、相模、阪神、JR 東海は旅客輸送人キロが少ないのに旅客運輸収入が多いことが分かる。JR 東日本は JR 東海に比べて旅客輸送人キロが多いが、その割りに運賃が安いので旅客運輸収入が少ないようだ。このことは、実際のデータで確認すれば分るが、学生は専門家でないのでそこまでやる必要はないと歯止めをかけている。私鉄は旧国鉄に比べて営業キロは少ないが、その中であって広域をカバーしている東の東武と西の近鉄の重みが 0 であることは理解できる。

表 4.4 CCR モデルの重み(上)と Inverted DEA の重み(下)

SN	事業体名	W1	W2	W3	W4	W5	W6
1	東武鉄道	0	0	0	8.16	0.98	5.62
2	西武鉄道	0	0	0	11.96	1.44	8.23
3	京成電鉄	0	0	0	22.30	2.68	15.35
4	京王電鉄	0	4.26	0	0	12.16	2.16
5	東京急行電鉄	9.79	0	0	0	0	8.80
6	小田急電鉄	1.36	0	0.78	8.78	0	9.37
7	京浜急行電鉄	1.23	0	0	15.45	0	13.83
8	相模鉄道	4.69	0	0	29.91	0	29.39
9	名古屋鉄道	0	0	0	13.43	1.61	9.24
10	近畿日本鉄道	0	0	0	6.27	0.75	4.32
11	南海電気鉄道	0	0	0	17.33	2.09	11.93
12	京阪電気鉄道	0	0	0	20.84	2.51	14.34
13	阪急電鉄	0	3.01	0	0	8.60	1.53
14	阪神電気鉄道	2.88	0	0	36.17	0	32.39
15	西日本鉄道	0	0	0	45.30	5.45	31.17
16	JR 東日本鉄道	0	0	0.53	0.21	0.71	0
17	JR 東海鉄道	0	0	0	1.29	0	0.96
18	JR 西日本鉄道	0	0	0	1.29	0.15	0.89

SN	事業体名	W21	W22	W23	W24	W25	W26
1	東武鉄道	0	0.55	0.15	4.77	0	7.61
2	西武鉄道	0	0	0.79	10.78	0	11.48
3	京成電鉄	0	0	2.84	19.08	9.24	15.23

4	京王電鉄	0	0	1.12	15.21	0	16.20
5	東京急行電鉄	0	0	0.71	9.64	0	10.27
6	小田急電鉄	0	0	0.78	10.68	0	11.37
7	京浜急行電鉄	0	0	1.16	15.78	0	16.80
8	相模鉄道	0	0	2.36	32.22	0	34.31
9	名古屋鉄道	0.36	0	6.68	0	15.56	0
10	近畿日本鉄道	0	1.01	0	0	7.59	0
11	南海電気鉄道	0	1.74	6.34	0	23.51	0
12	京阪電気鉄道	0	0.41	1.48	16.37	0	19.65
13	阪急電鉄	0	0	0.77	10.55	0	11.24
14	阪神電気鉄道	0	0	7.40	31.91	56.10	0
15	西日本鉄道	0.43	0	11.08	24.42	53.66	0
16	JR 東日本鉄道	0	0	0	0.64	0	0.64
17	JR 東海鉄道	0	0	0	1.29	2.05	0
18	JR 西日本鉄道	0.20	0	0	0	1.90	0

#### 4.4 1 入力固定改善法

表 4.5 は「1 入力固定改善法」である。小田急を改善目標と考えた場合、小田急の 4 入力 2 出力の変数値の構成比に他の 17 社がなれば、小田急基準で DEA 効率的になる。このため各社の経営資源の入力変数の一つを固定する。表では営業費用を固定した例である。表 4.1 の実際の値から、営業費用だけを固定して他の 5 変数を小田急の構成比になるように修正したものが最初の 6 変数である。17 社がこの値を実現できていれば、小田急基準で DEA 効率的になる。表 4.1 からこの値を引いたものが、右の改善量を表している。固定した営業費用の列と、小田急の行が 0 になる。出力の 2 変数は JR 東海の運輸収入以外全て負になっている。原則出力が正になるのは、DEA 効率的な 2 社だけである。JR 東海の営業キロ数が正で、小田急より大きい。しかし従業員数や車両台数が負で少ない。これは、他の鉄道会社と異なった恵まれた経営環境にあることを示し、SCORE=SCORE2=1 になる理由と考えられる。

「1 入力固定改善法」は、DEA 法の研究者に批判された。左の改善目標が DEA 法の効率フロンティアをはみ出して CCR 理論に違反することがあるという指摘である。たまたま、2012 年にゼミ生の江頭さんが上級演習で行った「東京都 23 区の公立図書館」の発表であったのが幸いした。1986 年時点で、千代田区の SCORE は 0.19 と最悪であり、世田谷区と杉並区が手本になった。しかし、世田谷区を手本に床面積を固定すると、杉並区を含む 22 区全ての床面積が 2 倍以上過剰である。即ち完全に改善点が DEA 効率フロンティアの外に来る。この事実は、単に 22 区の図書館の床面積が、世田谷に比べて広すぎて、箱物行政の典型であると回答した。

「過剰な床面積をどう改善すべきか？」をゼミのテーマにした。最初は「建物を小さくする」等の頓珍漢なアイデアが出てきたが、無駄な金がかかるといえば、「すぐに余分な床を整理して、貸し会議室等の多目的に利用する」という結論が導き出された。

2011 年には千代田区は効率値が 1 になり、大きく改善されている。これは土光臨調で三公社五現業に代表される問題が指摘され、主として経済人が大蛇を振るった。国鉄の民営化等の成果に隠れて見過ごされてきたが、都立図書館はみずから改革を行った成果である。

ここ数年、農協や非効率な制度に政府の意を受けて経済人が活躍している。残念なことに大学もその渦中にあり、農業セクターと同列に見られていることに大学人は発奮しなければいけないであろう。横道にそれたが、効率フロンティアからはみ出す場合は、大きな分かりやすい問題を抱えていて改善しやすいのである。公立図書館は、独自の中央図書館から、千代田区は区庁のビルの最上階に移転し、足立区では放送大学やその他の複合施設に入居という改善を行った。

都庁の大きな組織にあつて、図書館や美術館、そして区が管理監督する介護施設等は、組織の目標が比較的明確であり規模も小さい。個人のアイデアや発想や考え方の転換で、区立図書館同様に比較的容易に成果を上げやすいと考えている。区立図書館は、DEA を使わないで、会議でいろいろ検討した結果で成果を上げたのであろう。しかし、そこに DEA の分析結果があれば、紆余曲折せず、楽しく改善活動ができたと思う。また、市立図書館や、東京以外の公立図書館は、データとしてはっきり結果の出る DEA の利用が進められる。すでに分析例はあるが、公立病院の分析も見直す必要がある。

表 4.5 「1 入力固定改善法」

SN	営業	従業	車両	営業	輸送人	運輸	営業	従業	車両	営業	輸送人	運輸
	キロ	員数	台数	費用	キロ	収入	キロ	員数	台数	費用	キロ	収入
1	0.17	0.5	0.15	0.12	0.15	0.15	0.29	0.2	0.046	0	-0.02	-0.01
2	0.12	0.34	0.1	0.08	0.1	0.1	0.06	0.01	0.022	0	-0.01	-0.01
3	0.06	0.18	0.05	0.05	0.05	0.06	0.04	0.03	-0	0	-0.02	-0.01
4	0.08	0.25	0.07	0.06	0.07	0.07	0	-0	0.011	0	-0	-0
5	0.14	0.39	0.12	0.1	0.12	0.12	-0	-0.1	-0.01	0	-0.03	-0.01
6	0.12	0.35	0.1	0.09	0.1	0.11	0	0	0	0	0	0
7	0.08	0.24	0.07	0.06	0.07	0.07	0.01	0	0.006	0	-0.01	-0
8	0.04	0.11	0.03	0.03	0.03	0.03	-0	-0	0.01	0	-0.01	-0
9	0.1	0.3	0.09	0.07	0.09	0.09	0.43	0.13	0.032	0	-0.03	-0.01
10	0.22	0.65	0.19	0.16	0.19	0.2	0.37	0.34	0.016	0	-0.06	-0.02
11	0.08	0.24	0.07	0.06	0.07	0.07	0.09	0.07	0.002	0	-0.03	-0.01
12	0.07	0.2	0.06	0.05	0.06	0.06	0.02	0.06	0.018	0	-0.01	-0
13	0.12	0.35	0.1	0.09	0.1	0.11	0.03	-0	0.029	0	-0.01	-0.01
14	0.03	0.1	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	0.02	0.002	0	-0.01	-0
15	0.03	0.09	0.03	0.02	0.03	0.03	0.09	0.01	0.01	0	-0.01	-0
16	2.21	6.44	1.9	1.57	1.9	1.96	5.32	-0.4	-0.65	0	-0.65	-0.28
17	1.09	3.17	0.94	0.78	0.94	0.96	0.89	-1.1	-0.6	0	-0.45	0.077
18	1.09	3.18	0.94	0.78	0.94	0.97	3.99	0.63	-0.3	0	-0.41	-0.19

#### 4.5 統計分析による DEA 法の検討

DEA 法の分析結果を統計分析で比較評価することは課題であった。しかし、なぜか統計と経営科学を両方受講する学生は少ない。また 2012 年は、そこまで要求できる水準にある学生は卒業研究の黒岩さんと、上級演習の江頭さんの女子学生しかいなかった。両名ともまじめなので対応するであろうが、就職活動等への悪影響が心配された。しかし 2013 年は上級演習のゼミ生の 2 名はラグビー所属で、ハードルを挙げても精神面でバランスを崩すことはない判断した。そこで本節で述べる、 $p$  個の入力変数と  $q$  個の出力変数とそこから得られる  $p \times q$  個の 1 入力 1 出力の比の変数を、一元配置の分散分析で調べ、その後で元の変数と 2 個の効率値と  $p \times q$  個の比尺度をクラスター分析や PCA で分析するよう指導した。しかし、実際には卒業ゼミに持ち越すことになった。

##### (1) 良い統計ソフトとは

学生がデータを Excel に入力した段階でデータを提出させ、先回りして分析し、ゼミ発表に望んでいる。これをしないと、データ集めに難渋するとか、Excel の入力トラブルを解決できない学生もいる。これは 2014 年の授業科目の「経営科学」での経験である。4 年生で就活のため出席日数が足りない学生に、就職が決まった業種の代表的企業の 5 社以上、入力は資本金、従業員、本支店数等、出力は経常利益、売り上げ等を会社四季報等で調べて 5 頁以上のレポート課題を課した。製粉業界に決まった学生は、すぐに対応できた。日清製粉 1 強と言われる業界で、日清製粉と徳島製粉が DEA 効率的なことを報告してきたので、徳島製粉が選ばれた理由を追加で加えるように指示した。しばらくして理由が分かり、「1 強と言われる日清製粉に肩を並べるため、徳島製粉のように消費者向けの製品を出す等の対応が必要ですね」とうれしそうに言ってきた。しかし、うまくいかない学生は色々な点で壁にぶち当たるが、データを集めることと Excel 等の情報処理の基本ができていないことが原因の事が多い。

一方、2014 年の上級演習生が卒業研究に進み、初めて統計分析を行い、DEA 法の分析結果を補強することを科した。統計ソフトとして統計入門に添付してある JMP の無償評価版<sup>21</sup>を使うことを薦めた。評価版は 2003 年に JMP 事業部と交渉して解説書に添付することが認められた Ver. 5.01 である。2014 年には Ver. 12 が出ているが、2013 年まで Microsoft の XP のサポート打ち切りというユーザー離れを誘発する間違った政策を受け、JMP も正式のサポートを打ち切るという通知をもらった。なんとそれまで無償版をサポートしてくれていた。調べると Windows 10 でも問題なく動くが、今後のバージョンアップに対応できなくなるかもしれない。評価版に収録の多くのデータは統計の勉強にそのまま使える。しかし利用者のデータは最初の 20 件までしか利用できない。幸い DEA 法では、SCORE と SCORE2 の両方が 1 にならないものを省いても分析結果に大きく影響しない。これに対して筆者がフルセットの永久ライセンス(?)を持っていたある統計ソフトは、ユーザーインターフェイスだけの改善に何度か更新料を払ってきたが、数年更

---

<sup>21</sup> 大学で契約していた JMP が 2013 年度に継続されず、『JMP 活用 統計学とっておき勉強法. 講談社, 2004』を利用するように言ったが、石塚君から卒業するまでそのことの不便さを指摘された。

新しなかったところ利用できなくなっていた。

筆者は、「分析系のソフトは良いソフトを使えば研究や授業の知的生産性があがり、悪いソフトを使えば労多くして益なし」と社会に情報発信しているが、大学では控えてきた。汎用統計ソフトでは、SAS, SPSS, Statistica の解説書を書いてきたが、JMP に最後にたどり着いた。しかし、大学の研究者の中には B 級グルメならず B 級ソフトの愛好家が意外と多い。良いソフトの 3 条件は次の通りである。

1. 操作法が初心者にとって容易であること。JMP はメニューがシンプルである。1 変量の Window で分析したい変数を指定するだけで必要な統計量からグラフまで出力される。どの出力が重要かを筆者が決め、その選択を最初に行っておけば重要な出力が得られる。これに対して JMP 以前のソフトは、相当な知識を前提にオプションをこまめに指定する必要がある。GUI であればクリックすれば良いと考えている人も多いが、正しい統計オプションの選択は高度な知識と経験が求められる。
2. 大量の作業であっても少ない作業とほぼ同程度の作業量で行えること。例えば Excel でクロス集計を行おうとすれば、作業量は出力の表数にほぼ比例する。
3. そして、専門家が必要とする重要な手法が全て利用できること。これができないと、複数のソフトを使い分けなければいけなくなる。この点で、JMP は少し問題がある。SAS とのすみ分けのため、クロス集計は 2 変数まで、クラスター分析や因子分析は SAS が提供する一部しかサポートしていない。これも一つの見識かもしれない。

## (2) DEA 効率値

図 4.1 は SCORE を x 軸に、SCORE2 を Y 軸にとった散布図である。DEA 効率的であり DEA 非効率な評価対象の JR 東海(17)が 1 社ある。業務形態等で他社と異なっていることを示す。1 入力固定改善法を行えば、営業キロ当たりの運賃収入の高さ等の他社との違いが分かる。

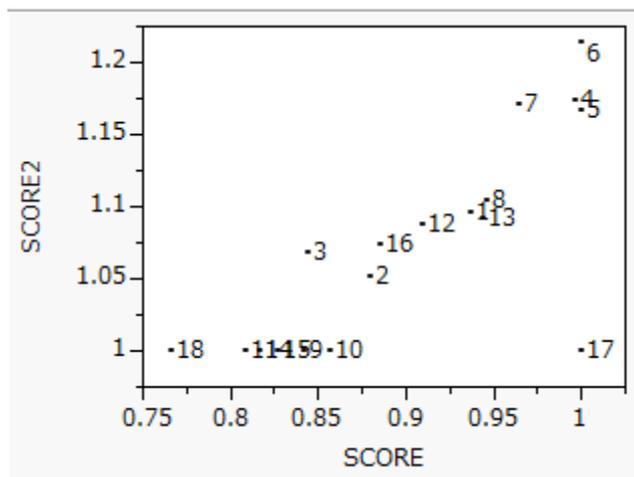
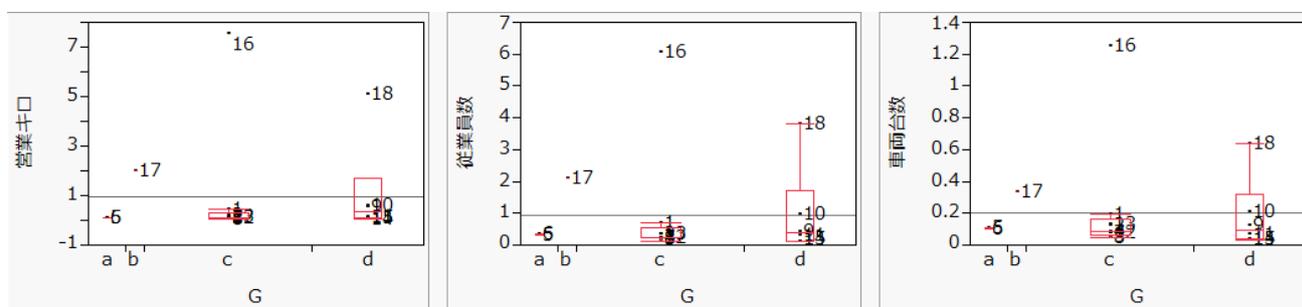


図 4.1 SCORE を x 軸に、SCORE2 を Y 軸にとった散布図

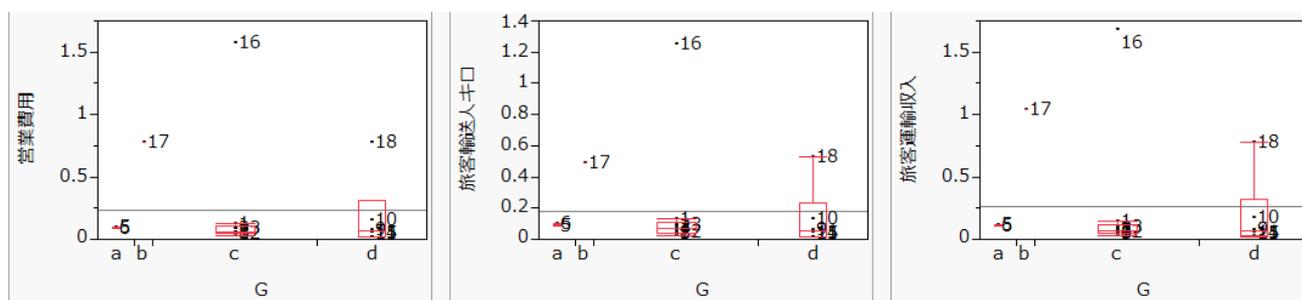
図 4.2 の (i) と (ii) は、元データの一元配置の分析である。規模では 16、17、18 の旧 JR 3 社が私鉄を圧倒していることが分かる。これらを省いて再度分析すると、私鉄の違いが分析できる。2015 年 10 月から、ビッグ・データの代表である、遺伝子データの分析に軸足を置いた。こ

の分野の研究は 30 年以上統計で癌遺伝子を探しているが成功していない。この一番の理由は、正規分布を仮定し、分散比最大化基準をとる判別関数は、がん症例と正常症例のマイクロアッセイが線形分離可能にもかかわらず、誤分類数が 0 にならないことである。そして、ここ 10 年の研究では、クラスター分析や一元配置の分散分析の t 検定が用いられている。きっと t 値の大きな、すなわちがん症例の平均が正常症例より大きな遺伝子を癌細胞と考えているようだ。このアプローチは 2 つの大きな間違いがある。

- 1) 特定の癌症例で非常に大きな外れ値があると、その他の癌と正常症例は図 4.2 以上に箱が圧縮され、通常の t 検定の解釈はできない。
- 2) 筆者が見つけた癌遺伝子の組に含まれる遺伝子の t 値は正から、ほぼ 0、そして負になるものが多い。負になるものは癌の抑制遺伝子であろう。ほぼ 0 になるものの役割が分かっていない。



(i) : 左から営業キロ, 従業員数, 車両台数

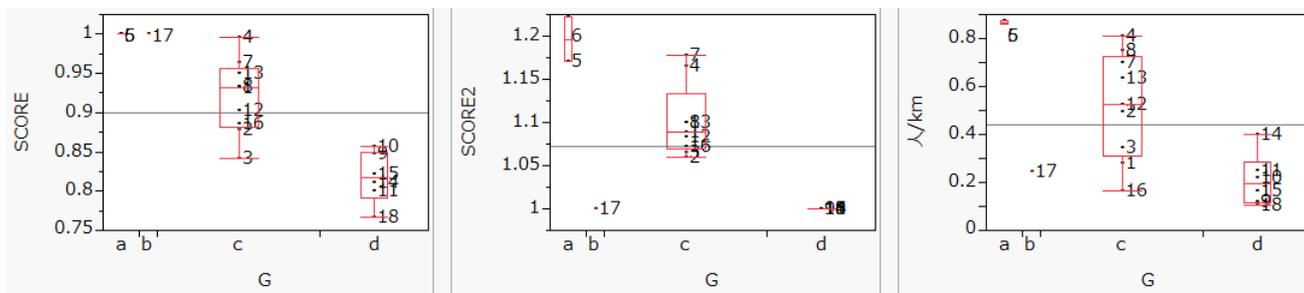


(ii) : 左から営業費用, 旅客輸送人キロ, 旅客輸送収入

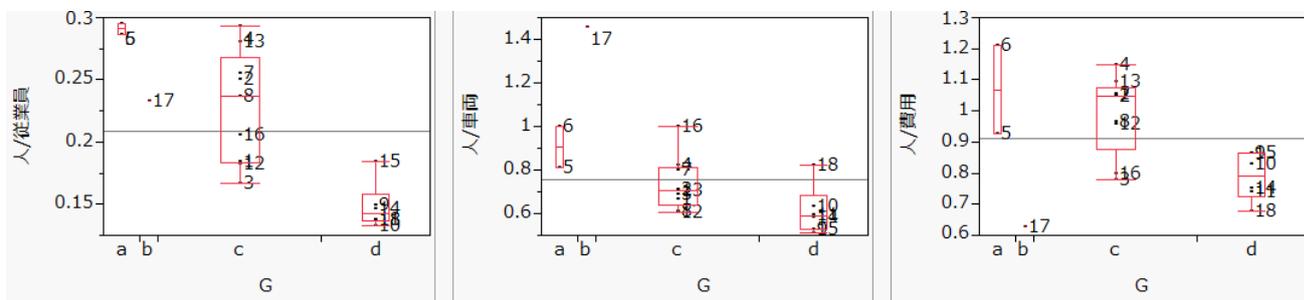
図 4.2 元データの一元配置の分析

図 4.3 は、2 個の効率値と 8 個の比データの一元配置の分析である。旅客輸送人キロ/営業キロと旅客輸送人キロ/従業員では、A 群の小田急と東急が営業キロと従業員に対し、旅客輸送人キロが大きい。これに対し JR 東海は小さいことを示す。C 群は大きな幅があり、SCORE2 が 1 の D 群は C 群の中央値より最大値が小さいのが非効率な 1 つの理由であろう。旅客輸送人キロ/車両台数では JR 東海が最も効率的で、旅客輸送人キロ/営業費用は逆に最低である。これは、キロ当たり運賃が高く、乗車率が良いことを示す。旅客輸送収入/営業キロでは小田急と東急が JR 東海より優れ、旅客輸送収入/従業員では逆の関係になる。旅客輸送収入/車両台数では圧倒的に JR 東海が優れ、旅客輸送収入/営業費用では JR 東海の B 群, A 群, C 群, D 群の順である。輸送距

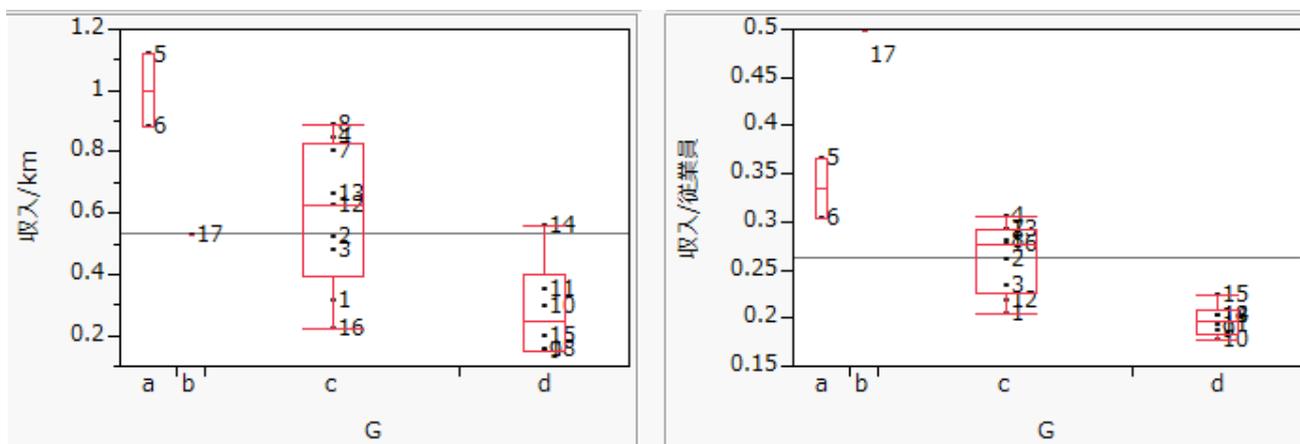
離/車両, 収入/車両, 収入/費用で東海が圧倒的に経営努力でなく効率的な経営環境にある. JR 各社に分割する際に DEA 法による分析で考慮した方が良かったであろう.



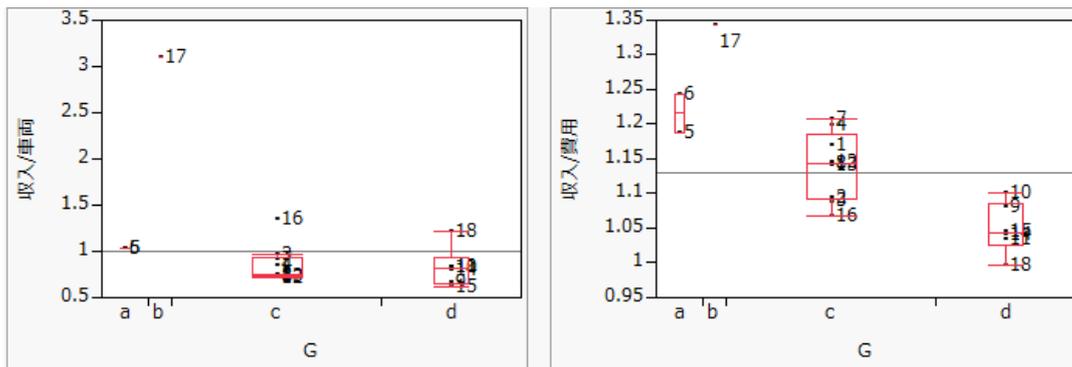
(i) : SCORE, SCORE2, 旅客輸送人キロ/営業キロ



(ii) : 旅客輸送人キロ/従業員, 旅客輸送人キロ/車両台数,  
旅客輸送人キロ/営業費用



(iii) : 旅客輸送収入/営業キロ, 旅客輸送収入/従業員



(iv) : 旅客輸送収入/車両台数, 旅客輸送収入/営業費用

図 4.3 DEA 効率値と非効率値で比データを 4 群に分けた一元配置

### (3) クラスタ分析

図 4.4 はクラスタ分析の結果である。DEA 法と同じく 4 群に分けた。しかし、一番下の×で表される JR 東海、菱形の JR2 社、+で表される京成、名古屋、近鉄、南海、阪神、西日本と、○で表される京成以外の関東 7 社と京阪と阪急の関西 2 社に分かれた。変数のクラスターでは、左から 6 変数は元データと人/車両, 収入/車両, 収入/従業員数が大きなクラスターになり, SCORE と収入/費用と, SCORE2 と他の 4 個の比尺度のクラスターに分かれた。

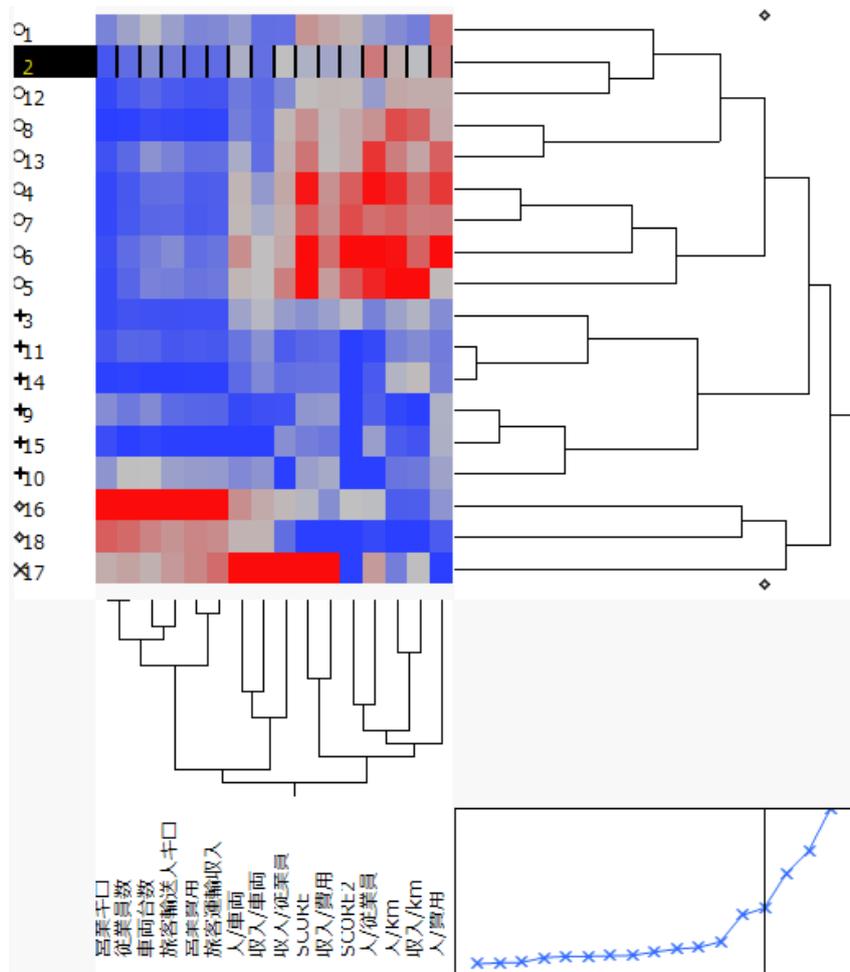


図 4.4 クラスタ分析

(4) PCA

図 4.5 は 6 個の元データと 2 個の効率値の計 8 個の PCA の結果である。固有値が 1 以上は 8 個の変数に対し 2 個である。因子負荷プロットから、6 個の元データはほぼ第 1 主成分と 1 に近い相関、効率値は第 2 主成分と 1 に近い相関があり、DEA 法の表す情報は元データと無相関であることが分かる。スコアプロットから、第 1 主成分の大きい方から小さい方に向け、JR 東海、JR 東日本と JR 西日本、私鉄各社が雁行型になっていて、私鉄各社は第 2 主成分上でばらついて

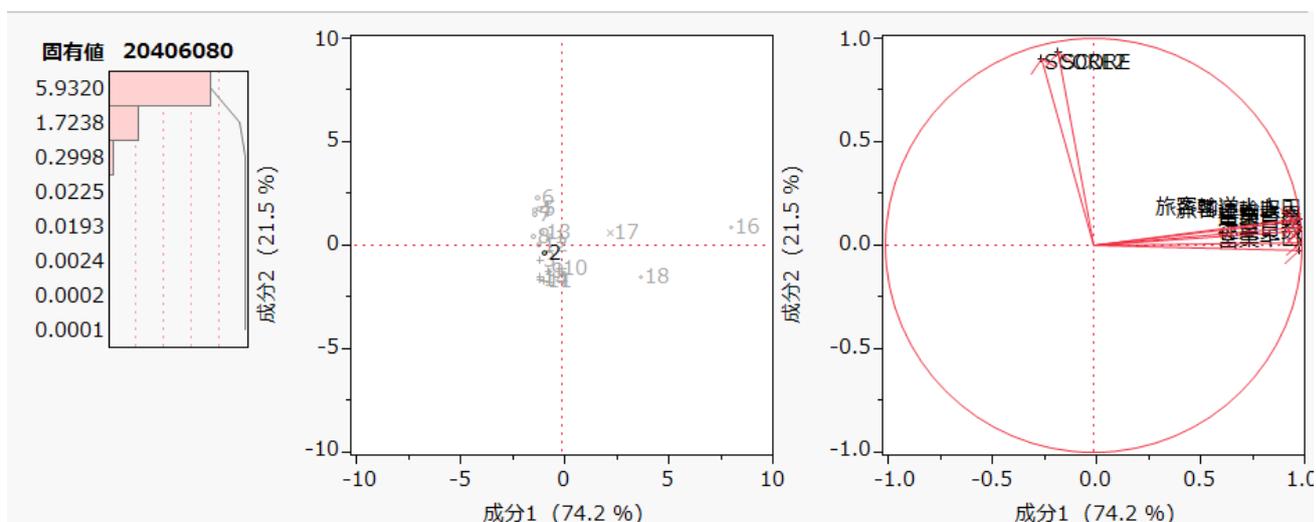


図 4.5 元データと両効率値の PCA

図 4.6 は元データと両効率値に 8 個の比データを加えた PCA の結果である。固有値が 1 以上は 16 個の変数に対し 3 個である。第 1 主成分と第 2 主成分上のスコアプロットから 2 象限から 4 象限に私鉄が並び、経営効率的と考えられる小田急、東急、京王から SCORE2 が 1 の近鉄(10) が並んでいる。DEA 法によって、入出力の比を考えることで、これまでの統計分析で得られない知見が得られた。一方、JR3 社は 1 象限の方向に私鉄と異なって布置しているが、これは私鉄と異なり経営規模の大きさを表すと解釈できる。

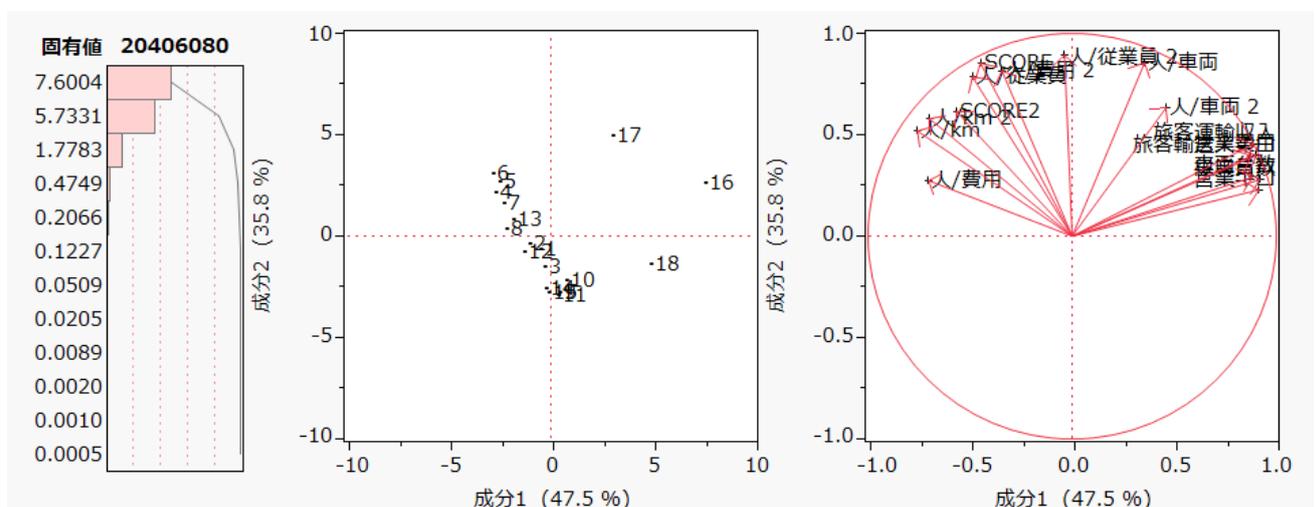


図 4.6 元データ、非データと両効率値の PCA の結果

右の因子負荷プロットは重なりのために良く識別できないので、表 4.5 に因子負荷量を示す。これと対応させて考えると、2 象限に SCORE と SCORE2 と輸送人キロ/営業キロ、輸送人キロ/従業員、輸送人キロ/営業費用、収入/営業キロ、収入/従業員、収入/営業費用が関係している。輸送人キロ/車両と収入/車両は 1 象限に布置し JR3 社を特徴付けている。このような明確に解釈が行える例は少ない。

表 4.6 因子負荷量

行	主成分 1	主成分 2	主成分 3	主成分 4	象限
営業キロ	0.91	0.23	0.31	0.06	1
従業員数	0.92	0.28	0.27	0.03	1
車両台数	0.88	0.29	0.36	-0.01	1
営業費用	0.90	0.40	0.16	0.02	1
旅客輸送人キロ	0.88	0.40	0.26	0.00	1
旅客運輸収入	0.89	0.45	0.07	0.00	1
SCORE	-0.45	0.85	0.00	-0.17	2
SCORE2	-0.57	0.61	0.48	0.01	2
輸送人キロ/営業キロ	-0.76	0.52	0.27	0.27	2
輸送人キロ/従業員	-0.49	0.79	0.23	0.01	2
輸送人キロ/車両	0.35	0.85	-0.30	-0.05	1
輸送人キロ/営業費用	-0.70	0.27	0.53	-0.36	2
収入/営業キロ	-0.70	0.58	0.08	0.39	2
収入/従業員	-0.04	0.89	-0.38	0.12	2
収入/車両	0.46	0.63	-0.62	0.01	1
収入/営業費用	-0.34	0.82	-0.34	-0.26	2

#### (5) 回帰分析

図 4.7 は、SCORE を元データと比尺度で変数増加法を行い AIC 最小の 5 変数が選ばれた。決定係数は 0.99 である。輸送人キロだけが元の変数であり、SCORE は他の 4 個の比尺度と関係している。

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t )
切片	-0.139876	0.052032	-2.69	0.0197*
旅客輸送人キロ(千人キロ)	0.063669	0.010491	6.07	<.0001*
輸送客/従業員	0.5390562	0.07196	7.49	<.0001*
輸送距離/費用	-0.163621	0.041436	-3.95	0.0019*
収入/車両	-0.091983	0.014131	-6.51	<.0001*
収入/費用	1.0214298	0.077014	13.26	<.0001*

図 4.7 SCORE を元データと比尺度で変数増加法

図 4.8 は、SCORE2 を元データと比尺度で変数増加法を行い AIC 最小の 3 変数が選ばれた。決定係数は 0.88 である。元の変数の車両台数と 2 個の比の変数が選ばれた。

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t )
切片	0.8305371	0.044259	18.77	<.0001*
車両台数(両)	0.067113	0.024473	2.74	0.0159*
輸送客/キロ	0.1901967	0.037613	5.06	0.0002*
輸送距離/費用	0.1582537	0.057819	2.74	0.0160*

図 4.8 SCORE2 を元データと比尺度で変数増加法

以上から、これまで重回帰分析や判別分析等で因果関係を表す統計分析で元データだけを用い、1入力1出力の比を考えてこなかった。しかし、これを加えることでより解釈が明確で豊富になることが期待できる。

## 第 5 章 日本の 10 電力の 2010 年と 2012 年度の比較

### 5.1 データと客観的な事実に基づく問題解決とは

石塚君は、エネルギー関連の業種に就職先を絞った。最悪の場合、石油販売でも良いということで、ガソリンスタンドでアルバイトを行い、オーナーとも懇意になり万が一の場合引き取ってもらふ手はずを整えた。そこで卒業研究は、日本の 10 電力の 2010 年と 2012 年のデータを集め原発の事故前と事故後を比較することにした。上級演習はすばやく対応したのに、5 月になってもなかなか報告をしない。問い詰めると「10 電力のうち、事故後に非効率になったのは東京電力でなく、九州電力であり、想定外の結果で別のテーマにしようか迷っている」ということである。

学生は、ありがたいことに教師が教えることが正しいものと信じ、それに反する結果が現われると何か間違ったことをしたと考えるようである。当事者の私は、決して DEA 法による分析や統計分析の結果を妄信するわけではない。「統計や数理計画法を用いれば、データや客観的な事実に基づいて問題解決が簡単にできることが多い。それで浮いた時間は、科学的と呼ばれる手法で解決できないより難しい問題を考える時間にあてるべきだ」と考えている。ある元首相は、「私はスタンフォード大学で OR の学位をとった問題解決学の専門家である」と主張した。首相の使命は、DEA 法や統計による定型的な問題解決を超えて、非定型で見えない問題を見つけ解決の手順を考え指示することにある。

しかし東電の事故を考えると、毎日のように大本営発表のように停電の地区割りの発表に多くの人が一喜一憂した。しかし、病院等停電すると困る地域を避けて数理計画法の「割り当て問題」を解けば簡単に解決できた。またこのような計画は、事故を想定し事前に準備すべきである。その上で、停電をお願いする地域には、他の民間企業が行うように料金割引等を事前に合意しておくべきであろう。実際は意図的であったかどうかは別として、東電広報の戦略の勝利である。関東圏全域が、大本営発表に一喜一憂し、わが家が指定されないことでほっとしたわけである。この種の問題解決は、数理計画法ソフトで事前に簡単に準備できる。そして、事故対策の多くはこのように簡単にできるものは技術者に任せ、首相等はいっとく困難な問題解決をすべきという、切り分けや役割分担が日本社会にできていない。

### 5.2 2010 年の分析

石塚君の卒業研究は、東日本大震災前後 2010 年と 2012 年の電力会社 10 社（北海道電力、東北電力、北陸電力、東京電力、中部電力、関西電力、中国電力、四国電力、九州電力、沖縄電力）の経営効率を比較することで、震災が電力業界に与えた影響を考察することである。仮説としては、原子力発電に重きを置いていた東京電力や関西電力等が経営効率値を悪くし、比較的震災の影響を受けていないと思われる四国電力や九州電力の経営効率値が上がると思っていた。

そして電力事業連合会が公表している、「電力統計情報<sup>22</sup>」より震災前の 2010 年度のデータと、震災後の 2012 年度のデータを用い、「発電電力 (MWh)」、「架線総延長 (km)」、「発電所数 (所)」、「営業費用(百万円)」を入力とし、「営業利益 (百万円)」、「契約口数 (口)」、「販売電力 (MWh)」を出力とする、4 入力 3 出力の DEA 法モデルを作成し、分析した。

### (1) 効率値から総括原価方式を読み解く

2010 年度のデータを DEA 法で分析した結果が表 5.1 である。ここでは計算結果をより簡素にするために変数の最大値が 0~1 の範囲になるよう単位をそれぞれ変換して分析した。変換した単位は発電電力 (億 MWh)、架線総延長 (万 km)、発電所数 (百所)、営業費用 (兆円)、営業利益 (兆円)、契約口数 (千万口)、販売電力 (億 MWh) である。

彼が間違ったテーマを選んだと考えたのは、DEA 効率値を示す SCORE は東北電力と中部電力を除く 8 社が最大値の 1 であり、Inverted DEA の DEA 非効率値 (SCORE2) が 1 と非効率な電力会社は、東電、中部電力、関西電力と四国電力を除く 6 社である点である。事故を起こした東電が、DEA 効率値が 1 で、Inverted DEA が 1 よりも大きく、他の電力会社に比べて非効率でない点である。そして両効率値の範囲が、 $0.98 \leq \text{SCORE} \leq 1$  と  $1 \leq \text{SCORE2} \leq 1.04$  で企業間の違いがほとんどなく、これまでのゼミ生の結果と大きく異なっている。そこで、私は「世間で言われている経済上のある概念が、数値として明確に出ている面白い結果であり、止めてはいけない」といって、次週まで調べるように指示した。次週は、それをテーマにして議論し次の結論を得た。

- 1) 総括原価方式のため 10 社の経営に大きな違いは出てこない。
- 2) SCORE が 1 にならなかった東北電力と中部電力の理由は、仮説として東北電力は太平洋と日本海側にまたがる県を営業エリアとするため、山間部を含む架線の総延長が比較的長く無駄なことが考えられる。また、両電力ともに原子力発電の比重が少なく、水力発電の小規模な発電所数が多いこと等を挙げた。
- 3) あるいは、電力料金の値上げ前であったかもしれない。これに関して調べるように言ったが、各電力会社の HP を探しても見つからないという報告である。実は、彼が参考にした「電力統計情報」に載っているが、印刷しないで PC 画面をスクロールしたため見落としたのであろう。いつ気づくだろうと卒業式当日まで待っていて時間切れになってしまった。「目の前にある情報を見落とさないように」と卒業のはなむけの言葉にした。
- 4) 関西電力の SCORE2 が 1.04 とわずかであるが改善の手本になる。これは間違いなく原発の比が高いためであろう。

彼は差が小さいので SCORE と SCORE2 の組み合わせで 4 分類することをすっかり忘れていた。A になるのは業界トップの東京電力と、2 位の関西電力だけである。B になるのは、北海道電力、水力発電の比の高い北陸電力、中国電力、九州電力と沖縄電力の 5 社もある。北陸電力は、当時の社長が高校と大学の同期であり、戦前ほど大きな比重ではないが水力発電王国である。沖縄電力は、水力と原子力がなく火力発電に頼っていることが、他電力との違いであることは理

<sup>22</sup> 文献の書き方を指導したが、最後まできちんとした文献の表記になっていないものを文献に載せていない。

解できるが中国電力と九州電力の特異性がこの時点ではわからなかった。一般的な C は中部電力だけで他産業に比べて著しく少ない。D は非効率な東北電力である。

表 5.1 2010 年度 CCR モデル分析結果

SN	事業所	発電 電力	架線総 延長	発電 所数	営業 費用	営業 利益	契約 口数	販売 電力	SCORE	SCORE2	G
1	北海道	0.33	0.80	0.66	0.51	0.55	0.40	0.32	1.00	1.00	B
2	東北	0.73	1.44	2.28	1.45	1.55	0.74	0.83	0.98	1.00	D
3	東京	2.64	1.49	1.92	4.79	5.15	2.87	2.93	1.00	1.01	A
4	中部	1.24	1.09	1.97	2.02	2.18	1.05	1.31	0.99	1.01	C
5	北陸	0.35	0.32	1.38	0.44	0.48	0.21	0.30	1.00	1.00	B
6	関西	1.32	1.41	1.65	2.25	2.48	1.35	1.51	1.00	1.04	A
7	中国	0.45	0.78	1.10	0.99	1.03	0.52	0.62	1.00	1.00	B
8	四国	0.29	0.33	0.65	0.48	0.53	0.28	0.29	1.00	1.02	A
9	九州	0.81	0.97	1.94	1.30	1.39	0.85	0.87	1.00	1.00	B
10	沖縄	0.07	0.08	0.22	0.14	0.15	0.08	0.08	1.00	1.00	B

(2) DEA クラスター

表 5.2 の DEA クラスターもこれまでの DEA 法と大きく異なっている。この点でも、石塚君が報告をためらった点でもある。関西電力と事業規模の小さい北陸電力が一つの DEA クラスターになり、残りの 8 社は構成員数 1 の 8 個の DEA クラスターになっている。この理由は比較的容易に次の作業仮説にたどり着いた。

- 5) 電力会社は、DEA 効率値や非効率値に大きな違いはないが、事業環境に大きな違いがあり、9 個の DEA クラスターになったと考えられる。発電形態一つとっても、沖縄電力は火力一辺倒、関西電力は原発に軸足を置き、北陸電力は戦前は水力発電王国であった。水力発電は、黒四は例外で小規模なものが多いので発電所数にそれが反映されている。

折角考えた DEA クラスターであるが、これまで学生には CCR モデルは、入出力変数が増えると DEA クラスターが増えて分析対象が細分化され、改善活動に不適切であるという説明に用いてきた。しかし DEA クラスターで初めて積極的な解釈に役に立った。最近では、医療において手術などの前後の評価の場合、患者を DEA クラスターで分かれるのは良いことではないかと思うようになった。

表 5.2 DEA クラスターによる分析

手本	構成員数	構成員
S1, S3, S10	1	S1
S6, S7, S10	1	S2
S1, S3	1	S3
S3, S6	1	S4
S5, S6	2	S5, S6

S3, S7, S10	1	S7
S3, S8, S10	1	S8
S1, S3, S6, S9	1	S9
S3, S10	1	S10

## 5.2 2012 年度の分析

### (1) 両効率値の分析

2012 年度の分析結果が表 5.3 である。2012 年度のデータも 2010 年度同様、単位変換を行っている。変換した単位については 2010 年度同様である。結果として九州電力を除く 9 社の SCORE は 1 となった。この結果は予想もしなかった。彼は原子力発電がストップしたことで、原子力発電所を多く保有している東京電力や関西電力が効率値を落としていると予想していたが、実際は DEA 効率的である。2010 年度は効率値を落としていた東北電力と中部電力も SCORE は 1 である。中部電力は発電電力、発電所数、営業利益が増えたことは、名古屋圏の製造業の電力需要が拡大したためであろう。逆に SCORE を落とした九州電力は、販売電力が減少したにも関わらず営業費用が増加していることから営業的に苦戦していると考えられる。一方、非効率値は中国電力と四国電力を除く 8 社が非効率になった、両効率値が 1 にならないのは中国電力と四国電力と九州電力だけで、残り 7 社は 1 と特異的になった。2010 年の 5 社が、原発が止まることで 7 社に増えた説明は今のところ分からないが、事故の影響が各社の経営に多様な影響を与えたのかもしれない。グループ分けは、スラッシュの左が 2010 年、右が 2012 年、変わらなければ一文字で示した。A から B に悪くなったのは、東京電力と関西電力である。地震と津波の被害にあった東北電力は、各年度の相対評価であるが D から B に改善している。原発の被害が少なかったためかと考えられる。これに対して中国電力は B から A に相対的に評価が上がり、逆に九州電力は B から D に評価を下げている。北海道電力、北陸電力、沖縄電力は B のままである。新聞報道等で、北海道電力は電力料金の再々値上げの窮状等が報じられているが、データを集めた 2013 年と時間差が有るか調べる必要がある。

表 5.3 2012 年度の DEA による分析

SN	事業 所名	発電 電力	架線 総延長	発電 所数	営業 費用	営業 利益	契約 口数	販売 電力	SCORE	SCORE2	G
1	北海道	0.29	0.80	0.69	0.68	0.56	0.40	0.31	1.00	1.00	B
2	東北	0.60	1.46	2.30	1.64	1.59	0.77	0.78	1.00	1.00	D/B
3	東京	2.41	1.48	1.97	6.03	5.77	2.89	2.69	1.00	1.00	A/B
4	中部	1.31	1.09	1.99	2.51	2.49	1.05	1.27	1.00	1.00	C/B
5	北陸	0.30	0.32	1.43	0.47	0.48	0.21	0.28	1.00	1.00	B
6	関西	1.15	1.42	1.67	2.88	2.52	1.36	1.42	1.00	1.00	A/B
7	中国	0.44	0.78	1.11	1.15	1.13	0.52	0.59	<b>1.00</b>	<b>1.01</b>	B/A
8	四国	0.20	0.33	0.65	0.56	0.50	0.28	0.27	<b>1.00</b>	<b>1.03</b>	A
9	九州	0.67	0.99	1.96	1.75	1.45	0.86	0.84	<b>0.97</b>	<b>1.00</b>	B/D

10	沖縄	0.07	0.08	0.23	0.15	0.16	0.09	0.07	1.00	1.00	B
----	----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

## (2) DEA クラスタ

表 5.4 に示す通り、DEA クラスタは 10 社に分かれた。例えば、北海道電力は、北海道電力と東京電力と沖縄電力を手本とするクラスタになる。きっと会計の専門家であれば、この 3 社の値に何か共通する関連があることを説明できると思われるが、そこまで分析を行っていない。九州電力だけが手本に含まれず、残り 9 社は属する DEA クラスタの手本に含まれている。2010 年は 9 個のクラスタで、わずか 1 個の増加であるが、発電電力量の大きな原発がとまることで、各社の火力、水力、地熱、風力等の経営環境の違いが影響した可能性が考えられる。

このことと関連すると思われる未解決問題がある。2011 年に旧知の石橋博史（株）システム科学代表取締役社長が、長年の「可視化経営」のシステムが完成し、日経コンピューター主催の研究会が行われた。そこでホンダの小型車を製造している八千代工業（株）の辻井元代表取締役副社長が同社の成果を報告された。会議後、DEA を使って別のアプローチで検討したいと申し出たところ、2 つのデータをいただいた。その一つが、小集団改革改善で個人の見える化で評価を行ったデータである。CCR モデルで分析すると全員が 1 になり、その理由が分からない。辻井さんから発表をしてよいと許可をもらっていたが理由が分からないのでそのままにしておいた。2017 年の今、本書の出版準備で本章を見直していて、可視的な改善で全員が 1 になったのではないかと考えている。これに関しては、本書の続編を出す場合、理由を考えて取り上げた。

表 5.4 2012 年度 DEA クラスタによる分析

手本	構成員数	構成員
S1, S3, S10	1	S1
S2, S7	1	S2
S3	1	S3
S3, S4, S5	1	S4
S4, S5, S7	1	S5
S4, S6, S7	1	S6
S3, S7, S10	1	S7
S2, S7, S8	1	S8
S5, S6, S7, S8, S10	1	S9
S3, S10	1	S10

## 5.3 両年度を同時に 20 社として分析

以上の結果に満足して、12 月まで次に進まない。4 年になって卒業単位をわずかに残しているのじっと我慢していた。試験が終わってすぐに呼び出し、区立図書館を例にポイントを説明し、最後の詰めを迫った。1986 年と 2011 年の東京都 23 区の公立図書館を 46 個の分析対象として分析し、土光臨調を受けて区立図書館は全て経営効率を改善した事例である。以下がそれを応用した概略である。

表 5.5 は、年度の 1 から 10 は 2010 年度、11 から 20 は 2012 年度、その下は 2012 年から 2010

年を引いた値である。発電電力では中部電力（と沖縄電力）を除く 8 社は減少している。中部電力は、中京地区の工場が震災復興に増産したのかその理由を調べる必要があるが、行っていない。販売電力は 10 社とも減少している。これに対して、架線総延長距離は事故の影響で東電だけが減少し、営業利益では四国電力だけが減少している。普通の産業であれば経営に大きなダメージを受けた後でこのように営業利益が増える結果にならないが、総括原価方式による事故後の電気料金の値上げのためであろう。20 社で分析したことで、 $0.925 \leq \text{SCORE} \leq 1$  と  $1 \leq \text{SCORE2} \leq 1.163$  と単年度の分析より多少差が開いた。この結果、SCORE が 1 で SCORE2 が 1 より大きい企業を a、両方 1 の特異的な企業を b、両方 1 でないものを普通の企業 c、SCORE2 だけが 1 の効率の悪い企業を d と 4 分類した。グループ分けは、2010 年度と 2012 年度の各単年度の評価を左に、20 社の分析の評価を右に記した。2010 年度は中国電力と九州電力と沖縄電力が b から a に評価を上げたので、原発停止の影響はないと思われる。2012 年度は、中部電力と北陸電力が b から d と悪くなり、関西電力が b から a と良くなっている。関西電力は、原発の依存度が高く、原発停止の影響が多いというのが共通認識であり、この比較は間違っているか否かは判断できない。

表 5.5 2010 年度と 2012 年度をあわせた分析

年度	事業所	発電電力	架線総 k	発電所数	営業費用	営業利益	契約口数	販売電力	SCORE	SCORE2	G
1	北海道	0.33	0.80	0.66	0.51	0.55	0.40	0.32	1	1	b
2	東北	0.73	1.44	2.28	1.45	1.55	0.74	0.83	0.996	1	d
3	東京	2.64	1.49	1.92	4.79	5.15	2.87	2.93	1	1.151	a
4	中部	1.24	1.09	1.97	2.02	2.18	1.05	1.31	0.991	1.097	c
5	北陸	0.35	0.32	1.38	0.44	0.48	0.21	0.30	1	1	b
6	関西	1.32	1.41	1.65	2.25	2.48	1.35	1.51	1	1.163	a
7	中国	0.45	0.78	1.10	0.99	1.03	0.52	0.62	1	1.101	b/a
8	四国	0.29	0.33	0.65	0.48	0.53	0.28	0.29	1	1.079	a
9	九州	0.81	0.97	1.94	1.30	1.39	0.85	0.87	1	1.107	b/a
10	沖縄	0.07	0.08	0.22	0.14	0.15	0.08	0.08	1	1.131	b/a
11	北海 2	0.29	0.80	0.69	0.68	0.56	0.40	0.31	1	1	b
12	東北 2	0.60	1.46	2.30	1.64	1.59	0.77	0.78	1	1	b
13	東京 2	2.41	1.48	1.97	6.03	5.77	2.89	2.69	1	1	b
14	中部 2	1.31	1.09	1.99	2.51	2.49	1.05	1.27	0.925	1	b/d
15	北陸 2	0.30	0.32	1.43	0.47	0.48	0.21	0.28	0.926	1	b/d
16	関西 2	1.15	1.42	1.67	2.88	2.52	1.36	1.42	1	1.002	b/a
17	中国 2	0.44	0.78	1.11	1.15	1.13	0.52	0.59	1	1.009	a
18	四国 2	0.20	0.33	0.65	0.56	0.50	0.28	0.27	1	1.015	a
19	九州 2	0.67	0.99	1.96	1.75	1.45	0.86	0.84	0.958	1	d
20	沖縄 2	0.07	0.08	0.23	0.15	0.16	0.09	0.07	1	1	b

差 1	北海 3	-0.04	0.00	0.03	0.17	0.01	0.00	-0.01
差 2	東北 3	-0.13	0.02	0.02	0.19	0.04	0.03	-0.05
差 3	東京 3	-0.23	-0.01	0.05	1.24	0.62	0.02	-0.24
差 4	中部 3	0.07	0.00	0.02	0.49	0.31	0.00	-0.04
差 5	北陸 3	-0.05	0.00	0.05	0.03	0.00	0.00	-0.02
差 6	関西 3	-0.17	0.01	0.02	0.63	0.04	0.01	-0.09
差 7	中国 3	-0.01	0.00	0.01	0.16	0.10	0.00	-0.03
差 8	四国 3	-0.09	0.00	0.00	0.08	-0.03	0.00	-0.02
差 9	九州 3	-0.14	0.02	0.02	0.45	0.06	0.01	-0.03
差 10	沖縄 3	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	-0.01

#### 5.4 統計分析

石塚君は丁寧に 7 個の元変数と 2 個の効率値, そして 12 個の比尺度を作成し, 一元配置の分析を行い, DEA 法の結果と比較したが省略する. またクラスター分析の結果も省いて, 3 つの PCA の比較を示す.

##### (1) 2010 年の PCA

PCA の分析は、真ん中のスコアプロットで 10 電力を大きくグループに分けるが、右の因子負荷プロットのグループと対応づけて検討すればよい。2010 年度の図 5.1 に示すスコアプロットから、東電(3)が第 1 主成分とほぼ 0.8 前後に布置しているが、第 1 象限には電力会社がない。そして、表 5.6 の第 1 主成分が例えば 0.8 以上の変数と対応していることになる。例えば多くの元の変数や河川、発電所と費用と利益の比などである。第 2 象限では、中国電力(7)と沖縄電力(10)が SCORE と対応している。第 3 象限の北陸電力(5)は、SCORE2 とは逆の方向であり、PCA からは非効率的であることになる。第 4 象限の中部電力(4)と関西電力(6)は、発電所数に対応している。北陸電力が、戦前は水力発電で小規模な発電所が多いのかもしれないと述べたが、データで確認の必要がある。残りの 4 電力は、ほぼ原点に近いので無理に解釈はしな

い方がよい。

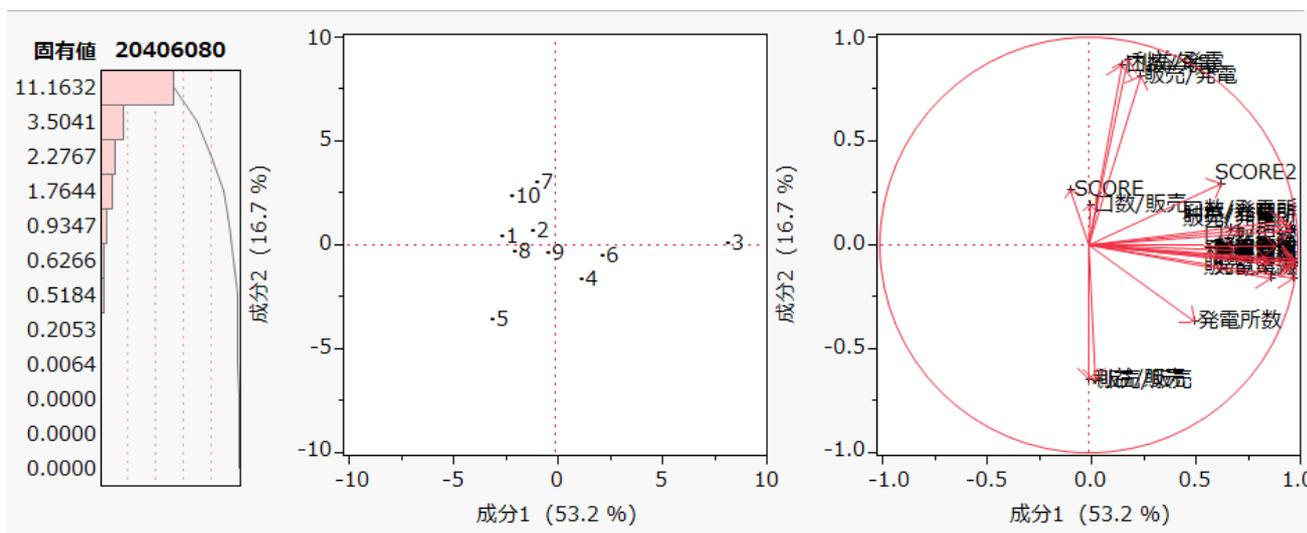


図 5.1 PCA

表 5.6 は因子負荷行列である。7 個の元の変数と架線総キロ(架線)を入力とした 3 個の比と費用を入力とし利益と販売を出力とする 1 入力 1 出力の 12 個の比は、第 1 主成分と 0.51 以上の相関で第 2 主成分は負の相関であり、第 4 象限に布置する。この値の大きなのは東電、関電、中部電力である。SCORE だけが第 2 象限に布置する。SCORE2 と、残り 7 個の比尺度は第 1 象限に布置し、第 2 象限にある中国電力や沖縄電力が対応している。北海道電力、東北電力、四国電力、九州電力は原点近くに布置している。これが長年の 10 電力関係を表していたと考えられる。

表 5.6 2010 年の因子負荷行列

変数	主成分 1	主成分 2	象限
発電電力(発電)	0.98	-0.16	4
架線総キロ(架線)	0.70	-0.03	4
発電所数(発電所)	0.51	-0.37	4
営業費用(費用)	0.98	-0.08	4
営業利益(利益)	0.98	-0.09	4
契約口数(口数)	0.99	-0.07	4
販売電力(販売)	0.99	-0.10	4
SCORE	-0.09	0.26	2
SCORE2	0.63	0.30	1
利益/発電	0.19	0.89	1
口数/発電	0.16	0.87	1
販売/発電	0.25	0.81	1
利益/架線	0.86	-0.09	4
口数/架線	0.89	-0.01	4

販売/架線	0.87	-0.16	4
利益/発電所	0.97	0.09	1
口数/発電所	0.93	0.11	1
販売/発電所	0.97	0.07	1
利益/費用	0.00	-0.65	4
口数/費用	0.01	0.20	1
販売/費用	0.03	-0.65	4

(2) 2012 年の PCA

2012 年度の図 5.2 に示すサンプルスコアから、2010 年から 2012 年の年次変化として、第 1 と第 2 象限の間と、第 3 と第 4 象限の間の上下移動が分かる。因子負荷プロットから SCORE2 が第 1 象限から第 2 象限に移動し、逆に SCORE が第 2 象限から第 1 象限に入れ替わっている。スコアプロットは、東電、中部電力、北電が同じ象限にある。第 2 象限にあった中国電力と沖縄電力は、他の 4 電力とグループになっている。

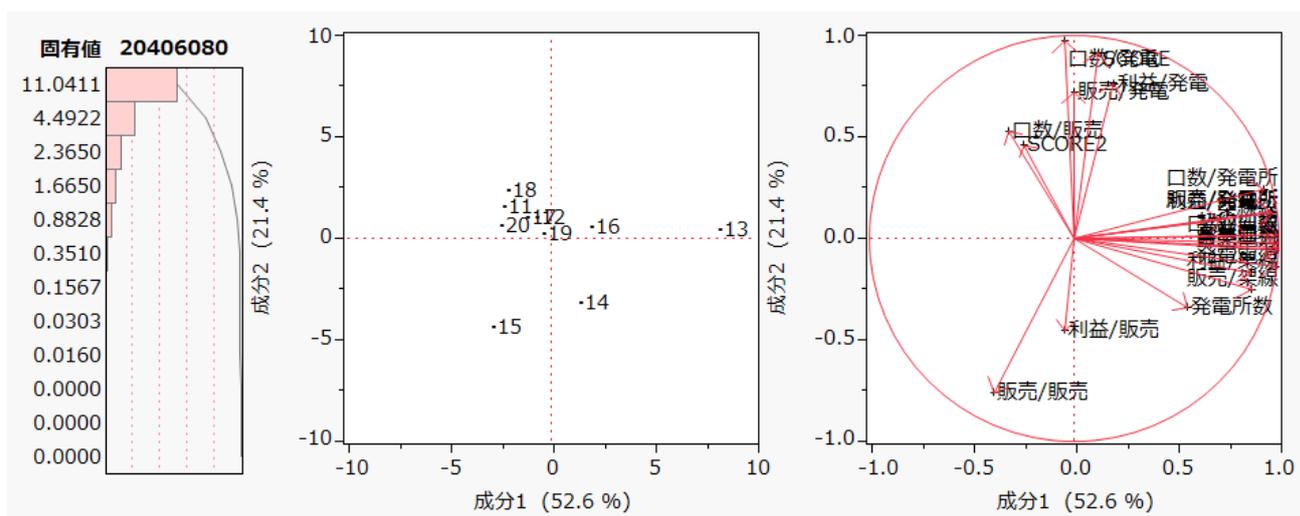


図 5.2 PCA

表 5.7 は因子負荷行列である。象限の左の数字は 2010 年の象限で、右の数字は 2012 年の象限である。4 象限から 1 象限に動いたのは 3 変数、4 象限から 3 象限に動いたのは 2 変数、1 象限から 2 象限に動いたのは 3 変数である。この検討は、優先順位を下げて検討しないことにした。

表 5.7 2012 年の因子負荷行列

変数	主成分 1	主成分 2	象限
発電電力	0.98	-0.14	4
架線総キロ	0.71	0.09	4/1
発電所数	0.55	-0.34	4
営業費用	1.00	-0.02	4
営業利益	0.99	-0.05	4

契約口数	0.99	0.02	4/1
販売電力	0.99	-0.06	4
SCORE	0.12	0.91	2/1
SCORE2	-0.24	0.46	1/2
利益/発電	0.19	0.76	1
口数/発電	-0.05	0.97	1/2
販売/発電	0.00	0.72	1
利益/架線	0.86	-0.17	4
口数/架線	0.84	0.01	4/1
販売/架線	0.87	-0.25	4
利益/発電所	0.97	0.13	1
口数/発電所	0.93	0.24	1
販売/発電所	0.96	0.13	1
利益/費用	-0.05	-0.45	4/3
口数/費用	-0.32	0.53	1/2
販売/費用	-0.39	-0.76	4/3

### (3) 20 社の分析

図 5.3 は、2010 年と 2012 年度をあわせた PCA である。サンプルスコアから、東電(3 と 13)が原発事故で 1 象限から 4 象限に下のほうに移動している。同じく関西電力(6 と 16)が大きく下に移動し、中部電力(4 と 14)より大きい。同じく九州電力(9 と 19)と四国電力(8 と 18)と北海道電力(1 と 11)が大きく動いている。これに対して、北陸電力(5 と 15)と沖縄電力(10 と 20)の移動距離は小さい。SCORE は小さくなり第 4 象限に、SCORE2 は第 2 象限に戻っている。現時点では、だれもが納得する説明に成功していないのが結論である。

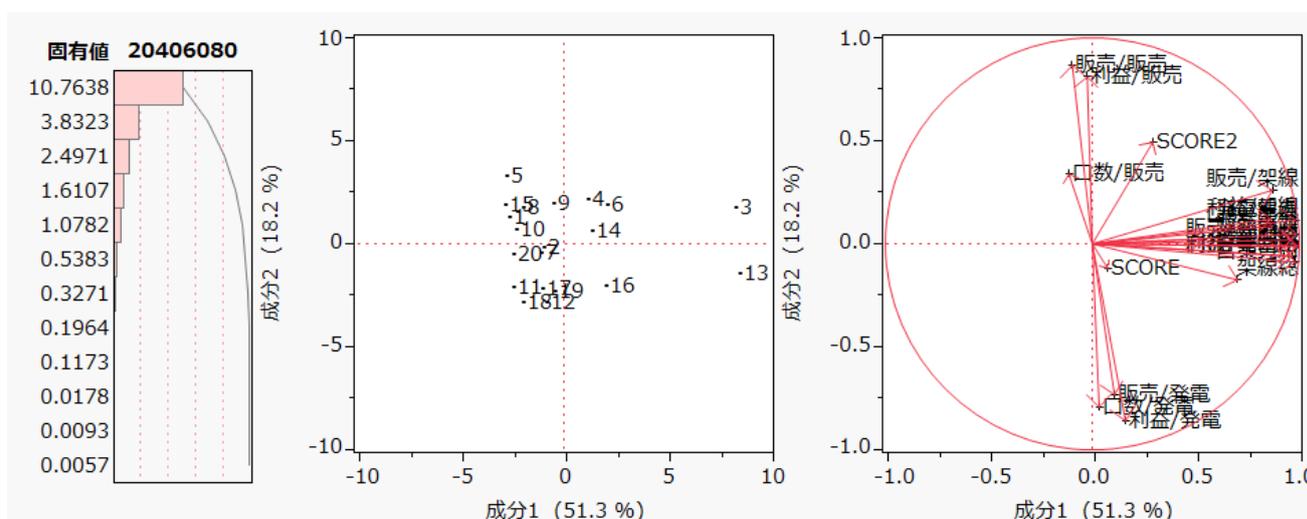


図 5.3 PCA の散布図

表 5.8 は因子負荷行列である。4 個の元の変数と SCORE と 5 個の比は、第 1 主成分と 0.51 以

上の相関で第 2 主成分は負の相関であり、第 4 象限に布置する。この値の大きなのは 2012 年度の東電と関電である。発電電力、発電所数と販売電力の元の 3 変数と SCORE2 と 4 個の比が第 1 象限に布置し、2010 年度の東電、中部電力、関電と 2012 年の中部電力が対応している。

表 5.8 2012 年の因子負荷行列

変数	主成分 1	主成分 2	象限
発電電力	0.98	0.11	1
架線総キロ	0.70	-0.18	4
発電所数	0.53	0.02	1
営業費用	0.98	-0.09	4
営業利益	0.99	-0.01	4
契約口数	0.99	-0.01	4
販売電力	0.99	0.05	1
SCORE	0.07	-0.12	4
SCORE2	0.29	0.49	1
利益/発電	0.16	-0.86	4
口数/発電	0.03	-0.79	4
販売/発電	0.11	-0.73	4
利益/架線	0.86	0.12	1
口数/架線	0.87	0.09	1
販売/架線	0.87	0.26	1
利益/発電所	0.97	-0.06	4
口数/発電所	0.93	-0.06	4
販売/発電所	0.96	0.02	1
利益/費用	-0.02	0.81	2
口数/費用	-0.11	0.34	2
販売/費用	-0.10	0.87	2

### 5.5 まとめ

本テーマは、研究者といえども CCR モデルだけで分析に成功したとは考えられない。SCORE の範囲が 0.925 から 1 の範囲である。SCORE2 と組み合わせることで両効率値が 1 になる企業が異常に他の産業に比べて多いことが分かった。これからすぐに総括原価方式で経営の効率性はある程度保証されるが、経営環境の違いで会社経営に大きな違いがあると思われる。また、DEA 法だけでなく、統計分析の一元配置の分散分析で変数の詳細な分析と、PCA で事故の前後の動きが分かった。東京都 23 区の 25 年間の違いの分析例を踏襲したが、解釈は 23 区の図書館のように説明に説得力がなかった。

2010年と2012年の両年を合わせたPCAのスコアプロットから、東電を先頭に、関電と中部電力を2番手とし、残り7社が雁行状態のしんがりを勤めるという構造は変わらない。しかし、事故の影響は、東京電力より関電や九電が大きく影響を受けたようだ。

## 第 6 章 数理計画法と LINGO

### 6.1 「データの科学」と「モデルの科学」

筆者は、分析したい対象がデータで表わされておれば、それを使いやすく高機能な統計ソフトで分析する「データ解析」あるいは「データの科学」の普及に悪戦苦闘してきた。そして分析対象が数式で表わされる場合、その解や**最大値/最小値**を使いやすく高機能な**数理計画法ソフト**（**ソルバー**ともいう）で分析する「**モデルの科学**」の普及に「データの科学」以上に悪戦苦闘してきた。

実は世の中の人間の営む活動で経済活動に関するものは、利益の最大化や、費用の最小化を実現することがテーマになるものが多い。それを研究するのが「オペレーションズ・リサーチ (OR)」とか「マネジメント・サイエンス (経営科学/工学)」と言われている。これらは第 2 次世界大戦後に急速に発展してきたが、**数理計画法**とか、**待ち行列**とか、**階層分析法** (AHP: Analytic Hierarchy Process)、シミュレーションとか、ゲーム理論とか、色々な分析手法の集まりである。各種統計手法が統計ソフトではほぼ体系化され利用できた。統計ソフトほどではないが、数理計画法ソフトもほぼオペレーションズ・リサーチの分野の手法を扱える。しかし、分析対象が数式で表され、その解や**最大/最小を求めることに主眼がある場合だけである**。例えば階層分析法は、筆者が開発者のトーマス・サーティ教授の大学と自宅のあるピッツバーグを訪問し代理店を取得した。この手法は、複数の**評価対象**の評価を分析者が 2 つの評価対象ごとに一対比較で階層化した評価基準ごとに、優位度等を直感でリッカート尺度 (Likert scale) で入力し、それらを固有値問題として解いて総合的な優位度を導くものであり、数理計画法に馴染まない。一方、決定変数が確率変数で定義できる**確率計画法**が開発され、待ち行列等の理論が数理計画法で分析できるようになった。

オペレーションズ・リサーチの研究分野は細分化されていて、それを体系的に理解し問題解決に役立てるのは難しい。しかし、シカゴ大学ビジネス・スクールの**ライナス・シュラージ** (Linus Schrage) 元教授は、当初シカゴ大学の学内ベンチャーとして LINDO Systems Inc. を立ち上げて、使いやすく高機能な数理計画法ソフトの **LINGO**、Excel のアドインの **What's Best!**、これらの開発に用いた C ライブラリーを最適化システムの開発に利用する **LINDO/API** を提供している。

当初から、扱えるモデルのサイズが小さい**評価版を無償**で提供している。ただし機能は、基本システム即ち **LP**、**QP**、**IP**、でありオプションの **NLP** と**大域的最適化**、大規模な LP を高速で解くバリア法 (いわゆる内点法<sup>23</sup>)、**確率計画法**のオプション製品は含まれていない。こ

<sup>23</sup> 内点法は AT&T が世界初の数学特許を取って使えないため、実質内点法と同じアルゴリズムで開発したものをバリア法と言っている。数学アルゴリズムを米国の国家戦略にすることと、内点法はそれ以前の研究に準拠していることで、オペレーションズ・リサーチの研究者から特許に反対の声明等が出された。日本の特許庁は米国との関係から国内特許を認めた。AT&T は、独自に開発したスーパーコンピューターと内点法を組み合わせたシステムを販売した。米軍の「砂漠の嵐作戦」のロジスティックスや、ある米国の航空会社の乗員とフライトの運用計画に用いられたようだが、それ以上の実績は公表されず失敗に終わった。AT&T は、C 言語や UNIX を無償で公開し、情報処理のデファクト・スタンダードに貢献したが、数理

の他、178 冊に及ぶ論文や書籍を調べて、LINGO と What's Best! で誰もが理解でき実践できる数百の「雛形モデル」にまとめている。本書で用いている DEA のモデルは CCR モデルの雛型モデルを改良したものである。

## 6.2 関数の最大/最小と極大/極小

統計の研究や利用者は、関数の最大/最小と極大/極小の違いを書いた統計書が少ないので気にかけてことがない人が多いが、難しいことはないので本節でぜひ理解してほしい。

### 6.2.1 関数の最大値と最小値

#### (1) 実行可能解ありと非有界の場合

関数  $y=2x+1$  の最大値を求める場合、 $x$  に定義域を設定しない場合は  $X$  は  $-\infty$  から  $\infty$  で定義されるので、LINGO では次のように記述し、SOLVE ボタンを押すと非有界 (UNBOUND) と表示される。

MAX=2\*x+1;

最小値を求める場合は「MIN=」で定義する。これを数理計画法では目的関数という。四則演算記号は「\*、/、+、-」を用い、べき乗は「^」で「!...;」はコメントを表す。SIN 関数等の関数は、@SIN () と@を前につける。

経営問題では、資源は有限である。 $X$  をある商品とし、在庫が 1 個から 3 個ある。利益は 2 で、メーカーから販促費が 1 ある。この問題は、 $X$  の定義域を  $[1, 3]$  とし、次のようにモデルを定式化し、SOLVE ボタンを押すと、 $X=3$  で最大値が 7 と出力される。この場合、定義域を表す 2 つの不等式は資源制約を表し、制約式という。「 $X>=1$ ;」と「 $X<=3$ ;」は、「かつ (AND) 」条件で「または (OR) 」条件ではないことに注意がいる。

MAX=2\*x+1;      目的関数

X>=1;X<=3;      資源制約を表す制約式

ここで、変数  $X$  は意思決定に関わるので数理計画法では決定変数 (Decision Variable) という。また、目的関数と制約式が決定変数に関して線形式あるいは不等式であるので、LP という。LP の特徴は、最大値あるいは最小値は、必ず制約式の端点である  $X=1$  か  $X=3$  で求まるという特徴がある。高校数学で習う「領域の最大/最小問題」は決定変数が 2 個あり、平面で説明できる問題であり、LP の解法を図解で示すアルゴリズムである。数理計画法のモデルは、一般的に一つの目的関数と複数の制約式が基本である。目的関数がない場合、単に制約式を満たす解の内の一つが出力される。

現実の問題が複数の目的関数を持つ場合、重みをつけて単一目的関数にするか、一つだけを目的関数に残して他を制約条件に組み込む。例えば、ノーベル経済学賞を取ったポートフォリオ理論は複数の株式や債権を組み合わせるリスクの最小化と利益の最大化を考える。そして、利益の最大化を制約式に組み込むことで単目的化している。

#### (2) 実行可能解なしの場合

---

計画法ソフトの数学アルゴリズムの特許による商用化には失敗した。

制約式の不等号を間違えて指定すると**実行可能解が無い**と表示される。

これは、「X が 1 未満かつ 1 以上」という制約式そのものを満たす領域（**定義域**）がないことを示す。すなわち、目的関数の問題ではない。

```
MAX=2*x+1;
```

```
X<=1; X>=3;
```

```
No feasible solution found.
```

### (3) 2次関数の最大値

2次関数  $y=x^2 - 2x$  を、定義域  $0 \leq x \leq 3$  で最大値あるいは最小値を求めたい。LINGO で定式化すると次のようになる。

```
MAX=X^2-2*x; X>=0; X<=3;
```

図6.1の実線のX軸の範囲が**定義域**で目的関数にとる**範囲**が**値域**で $-1 \leq y \leq 3$ であることを示し、 $y=3$ が最大値で、 $y=-1$ が最小値である。目的関数が2次式の場合、数理計画法では**QP** (QP:Quadratic Programming) という。QPでは、極大値と極小値は一つしかないので、 $y=-1$ は極小値であるが最小値であることが保証されている。図を見て分かるように、最大値は定義域の端点である $x=3$ で最大値 $y=3$ が得られた。しかし最小値は $x=1$  で $y=-1$ が定義域の中で得られる。QPの場合、極小値は最小値になる。

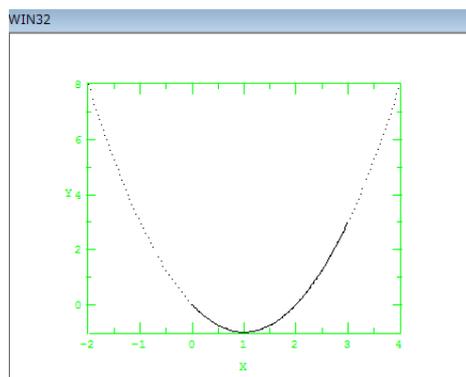


図 6.1 2次関数

上に凸な2次関数  $y=-x^2 + 2x$  では  $y=1$  は極大値で最大値になる。  $x=3$  で  $y=-3$  は最小値で微係数は0でないが、その近傍に  $-3$  より小さな値がないので極小値に準じる。すなわち極大値と極小値と最大値と最小値は2個以上ない。解法は、LPに置き換えて解くので、計算速度はLPに準じて早い。

### (4) 局所最適解と大域的最適解

統計ユーザーにとって、数理計画法の重要な知識は、**局所最適解**と**大域的最適解**の理解が重要である。例えば、定義域 $[0, 6]$ で次の関数の最小値を探す。

```
y=x*sin(pi*x)
```

LINGOで解くと、大域的な最小値が求まる。決定変数は、特に指定しなければ非負なので「 $X \geq 0$ 」は省いた。

```
MIN=X*@SIN(3.1415*X);
```

$X \leq 6$ ;

解は,  $X=5.518503$ で,  $-5.509345$ になる.

これをグラフにすると図 6.2 になる. 極大値, 極小値は微分や偏微分で求まる局所的な最大値あるいは最小値のことである. 即ちその点の近傍で大きな値がない場合を極大値という. また小さな値がない場合を極小値という. このため極大値と極小値は複数あってもよいが、最大値と最小値は 1 個だけである.

目的関数の最大化で, 初期値を 0 に指定すると昨日の低い NLP ソフトは  $x=1$  前後の極大値を求める. 同様に,  $x=1.5$  前後を初期値とすると 0.5 か 2.5 前後の極大値の何れかが求まる.  $x=4.5$  前後の 3 番目の極大値がこの定義域における最大値でもある<sup>24</sup>.

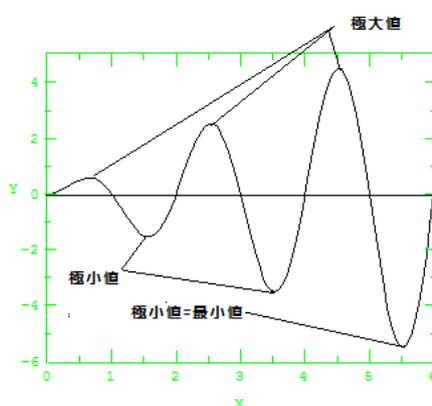


図 6.2 局値と大域的最適解

実は, 現実の世界では極大値や極小値ではなく, 利益関数の最大値や費用関数の最小値が役に立ち, 極大値や極小値でない. 例えば SAS の非線形回帰推定でこれに対応するため定義域を格子状に分割し格子の交差する格子点を初期値として検索する格子探索が用いられる.

機能の低い最適化ソフトであれば, 多くの場合デフォルトの初期値  $x=0$  で探索し,  $x=1.5$  前後の極小値を求める. 他の極小値を求めようにも,  $x$  を値の小さな方, あるいは大きな方に進むかの情報がないためである. しかし, 2000 年以降 LINGO を含む一部のソルバーで,

1) 大域的探索を行う機能が開発され, 初期値に依存しない最大値や最小値が求まるようになった.

2) 他にも本書で紹介したようにデータとモデルの分離が行えるようになり, 数理計画法ソフトが統計ソフトと同じく汎用化された.

3) IP は計算時間の改善が行われ, また決定変数が確率事象を扱う確率計画法が漸く提供された,

<sup>24</sup> 大域的最適解の探索オプション開発以前は, 次の初期値設定で最小値があると思われる値を設定して, 解を求めていた! INIT; X=0.1; ENDINIT

等の問題が解決された。統計ソフトに比べて社会的に利用者の拡大しない状況が長く続いたが、ようやく誰もが使いやすい統計ソフトのレベルになってきている。

#### (5) 統計手法で解が一つしかでない幸せ？

統計ユーザーは、多くの統計手法は統計ソフトを使えば解が一つしか出てこないことに慣れている。例えば、重回帰分析では、データを与えれば重回帰係数が一つ出てくる。これは回帰モデルに正規分布を仮定しているからである。これを分かりやすく示すのに、判別分析が適している。

フィッシャーの判別分析は、2群が平均だけ異なる正規分布であるというフィッシャーの仮説を前提として導き出された。一方、全体の分散（あるいは群内分散）に対する群間分散の比（相関比）を最大化する基準で導かれたと紹介され、その後で偏微分で判別係数の解を求めることが紹介されている。これは簡単に紹介するが、後者の説明は多くの読者に間違った理解を誘発する可能性がある。フィッシャーは「フィッシャーの仮説」を考えることで2群を表す正規分布を  $f_1$  と  $f_2$  とすれば、この対数をとると  $\log(f_1/f_2)$  は  $e$  を底とする指数関数の特徴で簡単に 1 次式になる。恐らく彼は計算機環境の乏しい時代にそのことに気づいて LDF を導いたと考えられる。彼かその後の研究者が、「フィッシャーの仮説」を前提にすれば、相関比最大化基準で同じ線形式が導かれることを発見したと考えている。フィッシャー自身は、計算時間がかかるがデータに依存した最尤推定法を提案しているが、分散比最大化基準を論じる場合、データがきれいな正規分布でない場合には、最尤推定法で求まる LDF は、決してフィッシャーの LDF と同じにならないことを説明すべきである。

しかしそのような煩雑なことを、正規分布を仮定することで簡素で使いやすい統計手法とそれを適用する統計ソフトがユーザーに歓迎されたと考える。これに対して、局値でなく最大値や最小値を追求する数理計画法ソフトは、素人受けしなく遅れをとったと考える。

#### (6) チャレンジングな問題

米国の数理計画法の学会では、この問題が解けるかというコンテストがよく行われているらしい。次の関数の最大/最小を求めることが、2000年以前にできるソフトが少ななかった。この解は、 $(X, Y) = (7.9786, -7.9786)$  で、目的関数の値は-15.8335である。

「@BND(-10, X, 10);」関数はXの定義域を  $[-10, 10]$  で、「@BND(-10, X, 10);」関数はYの定義域を  $[-10, 10]$  であることを指定している。

$$\text{MIN} = X * @\text{SIN}(Y) + Y * @\text{SIN}(X);$$

$$\text{@BND}(-10, X, 10);$$

$$\text{@BND}(-10, Y, 10);$$

LINGOで図6.3のサーフェス・プロットと等高線図が作成できる。数式からも分かるが、グラフから原点を挟んで対象であることが分かる。数理計画法ソフトは、最初に見つけた解を出力し停止するので、解が複数あるか否かの対応は読者の責任になる。一方、統計ソフトは便利な正規分布の仮定で、解を一つしか出さないことは注意がいる。

筆者は、代表的なビッグ・データの一つである「癌の遺伝子解析」で、最小誤分類数

(MNM:Minimum Number of Misclassification)基準による最適判別関数で, 30年以上研究され統計的に良い結果が得られていない6種のマイクロアレイ (Microarray) データを判別し, 数十個の癌遺伝子の組を複数個見つけた. これは整数計画法に用いられる分枝限定法で可能になり, SVM等の他のLDFではMNM=0になる解が遺伝子の部分空間で複数あることを見つけれないので, 理解できない人も多い.

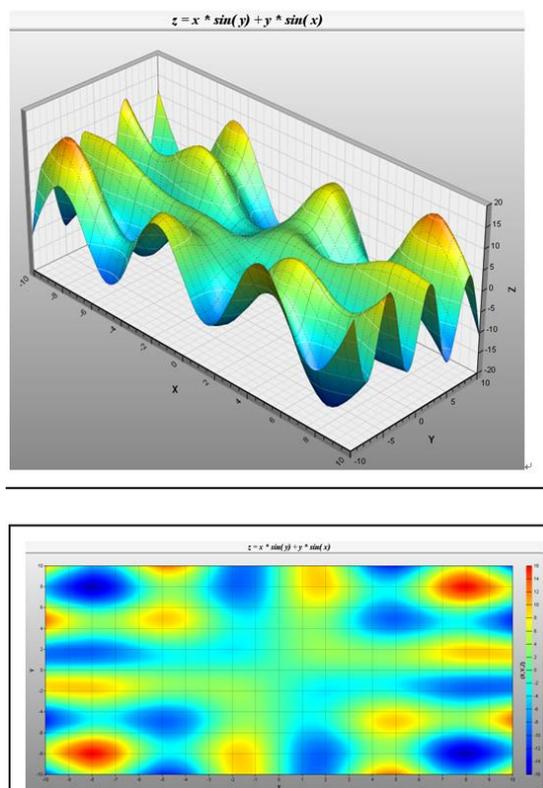


図 6.3 サーフエス・プロットと等高線図

### 6.3 現実問題への利用

関数の最大値や最小値を求めることは, 現実の経営や経済の問題と無縁な自然科学の領域と考えるかもしれない. そこで, 本節では現実への応用を取り上げる.

#### 6.3.1 ローンの返済

人生の一番大きな買い物は, 住宅の購入であろう. しかし, 全て金融機関まかせで, 自分で計算した人は少ない. 私がこの式を知ったのは, シュラージ氏の GINO(青沼, 新村訳, 1989) と呼ばれる第 1 世代の非線形ソルバーの解説書であった<sup>25</sup>. 第 1 世代の LP(QP を含む) と IP ソルバーは LINDO(新村, 高森訳, 1992) である. そして, 表計算のアドイン・ソルバーの VINO(Visual InteractiveOptimizer) と NLP の GINO が提供されていた. 第 2 世代は, LINDO と GINO が LINGO(Schrage, L., 2006) に, VINO が What's Best! になった. 長らく数理計画法ソフトは, LP, IP, NLP と計画法ごとに独立していた. 現在ユーザーはこれらの計画法を気

<sup>25</sup> 自宅購入の後で知ったので, 筆者も実際に役立てていない.

にすることなくモデルを自由に記述することで、LINGO や What's Best!が数理計画法モデルのソルバーを選択してくれる。

P はローンの総額である。A はローンの場合は月次返済額になる。ボーナス併用の場合は、ボーナス月の返済額になる。i は月次金利である。年金利から月次金利の計算は、日数調整等を考えないで 12 で割ったものを利用する。n は返済回数で、30 年返済の場合は 360 になる。

ローンを 5000 万円借りたい。年金利 4%の月次均等払いで、60 万円以下の返済を考えた際、何ヶ月返済になるであろうか。この方程式は、金利 i は他の変数による明示的な関数でないため、多くの数学ソフトウェアで解くことは難しい。

```
MIN=N;  
P=A*(1-(1+i)^(-n))/i;  
P=5000;  
i=0.04/12;  
N=360;  
END
```

答えは、月 21.0802 万円を N=360 回 (30 年払い) 支払うことで 5000 万円のローンを組むことができる。

Objective value: 360.0000

Variable	Value	Reduced Cost
N	360.0000	0.000000
P	5000.000	0.000000
A	21.08020	0.000000
I	0.2500000E-02	0.000000

問題 1: ローンの式を等比級数の和の公式を使って導いてみよう。

問題 2: ボーナスマ月に 50 万円払うことを想定し、ボーナス返済モデルを付け加えて解いてみよう。

### 6.3.2 領域の最大/最小問題とプロダクト・ミックス

LP のアルゴリズムの図的解法である「領域の最大/最小問題」は、プロダクト・ミックス問題と呼ばれる製品を部品で組み立てる産業の入門と関係している。

製造業は、大きく分けると

- ・部品を組み立てて最終製品を作ることは、「組み立て (Discrete) 産業」で利用できる。例えば自動車、電気、機械産業、工場で製造された食材を店頭で調理するファースト・フード産業等がある。ただこの問題は単純に利用することは今日では少なく、製造装置等の利用制限とからめて生産計画を作成する。あるいは受注生産の生産調整等の複合問題で利用される。

- ・石油会社や化学産業等の「装置 (Continuous) 産業」、食品や酪農や養鶏業等の配合飼料、製鉄やアルミ等の金属製造産業で用いられるのは、次に紹介する「配合問題」である。この

モデルは、そのまま幅広い産業で今日でも応用されている。

本書でプロダクト・ミックスを紹介するのは、

- 1) 領域の最大/最小問題そのものを理解するのに適している。しかし、単純なプロダクト・ミックスは今日出番が少ない。
- 2) 配合問題は金属製造業や石油産業を中心に今日でも数理計画法の大ユーザーである。そして、プロダクト・ミックスは配合問題と双対な関係にある。
- 3) 減少費用や双対価格といった LP の重要な説明に適している。

あなたは、パソコンの生産者としよう。組み立て問題は、部品を組み合わせで最終製品を作る。問題を説明すると次のようになる。

**問題の概要:** ガレージ産業のオーナーで次の 2 種類の PC を製造する。

**標準 PC :** 1 個の標準シャーシ, 1 個のハードディスク, 1 台 30 (千円) の利益。

**高級 PC :** 1 個の高級シャーシ, 2 個のハードディスク, 50 (千円) の利益。

**部品在庫 :** 各部品の在庫は、60 個, 50 個, 120 個である。

経営上の問題は、現在の在庫部品数の制約で、標準 PC と高級 PC を何台作り、利益を最大化するかである。LINGO によるモデルは次の通りである。

1)  $MAX=30*S + 50*D$ ;

2)  $S < 60$ ;

3)  $D < 50$ ;

4)  $S+2*D < 120$ ;

実行すると、次の解が出力される。即ち標準 PC を  $S=60$  台、高級 PC を  $D=30$  台作ることで 330 万円の利益が得られる。

Objective value: 3300.000

Variable	Value	Reduced Cost
S	60.00000	0.000000
D	30.00000	0.000000

### 6.3.3 配合計画 (Blending)

物を混ぜ合わせる**配合計画**は、製品の組み立て問題と異なり、雛型モデルがほぼそのまま現実に適用できる。物と物を配合することは、産業活動で重要な役割を持っている。

- ・ 鉄鋼業では原鉱石やコークス等から最高品質の各種鋼材を一番安く作っている。これは製鉄だけでなく、アルミ等の他の金属や牛や鶏の飼料の配合にも適用できる。
- ・ 石油産業では種類の異なる原油から各種石油製品を作っている。ある石油精製企業では、IBM の汎用機で IBM の数理計画法ソフト MPSX (現在サポートしていない) を利用していたが、PC で稼動する What'sBest! に置き換えて、大きな経費削減と柔軟な運用が実現でき感謝されたことがある。
- ・ また、セメントや配合飼料等の業界でも配合計画は広く利用されている。

これらの産業は、古くからの数理計画法ユーザーで、製品混合計画を利用する組み立て型の産業に対して装置型産業の代表である。

この鉄鋼メーカーでは、従来 LP を使わないで勘に頼って生産計画をたてていた。その一つが、表 6.1 に示す 11 個の原材料を用いて、ある製品を作る場合である。下限と上限が逆なのは、現場の実際の問題と間違わないようにするためになかろうかと理解している。

表 6.1 11 個の原材料を用いて最終製品を作る

	含有成分	Cu	Si	Fe	Zn	Mn	Mg
	下限	1.8	10.8	0.84	1.6	0.0	0.34
	上限	2.2	11.2	0.90	1.8	0.3	0.35
原材料	単価 (千円)						
X1	275	1.4	3.3	0.7	1.5	0.2	0.8
X2	275	2.5	8	0.8	4.5	0.2	0.3
X3	285	2.5	7.7	0.9	0.9	0.18	0.19
X4	285	2.5	9.5	0.9	0.9	0.18	0.09
X5	185	2.5	9.3	0.95	0.93	0.18	0.09
X6	235	2.3	8.4	0.8	3.0	0.21	1.4
X7	235	2.5	9	0.9	0	0	0
X8	260	0.2	0.2	0.5	0	0.5	0
X9	290	98	0	0	0	0	0
X10	340	0	97	0.5	0	0	0
X11	255	4	0.5	0.5	0.1	0.5	0.5

これを、LP でどう解決すればよいだろう。

シュラージ氏は、数理計画法モデルの作成は、**雛型モデル**を用いることができず自分で作成する場合、次の **ABC ステップ**で作成することを勧めている。ABC は、What's Best! で Adjustable セル(決定変数)を決め、それで目的関数の Best セルを決め、最後に制約式の入る Constraints セルを決めるモデル作成の 3 段階の手順である (**ABC ステップ**)。

(1) 第 1 段階: **決定変数**を決める

**第 1 段階で決定変数**(What's Best! では修正可能変数)を決める。原材料 1 から原材料 11 までの最終製品における配合比を、X1 から X11 の 11 個の決定変数で示す。

(2) 第 2 段階: 決定変数で**目的関数**を決める

**第 2 段階で、決定変数で目的関数**を決める。X1 の単価が 275 円で、X11 の単価が 255 円だ。最終製品の原材料費は次の式になる。

$$275 * X1 + 275 * X2 + \dots + 255 * X11$$

この値を、以下の制約条件を満たす範囲内で、最小にしたい。

(3) 第 3 段階: 決定変数で**制約式**を決める

第3段階では、決定変数で制約式を決める。

これらの配合比の間には、次の関係がある。

$$X1+X2+X3+\dots+X11=1;$$

あるいは、百分率で考えて次のようにしても良い。

$$X1+X2+X3+\dots+X11=100;$$

さらに実際に 150 トン作りたのであれば次のようになる。

$$X1+X2+X3+\dots+X11=150;$$

そして、次の2つの不等式制約が銅に関する制約になる。

$$1.4*X1+2.5*X2+\dots+4.0*X11>=1.8;$$

$$1.4*X1+2.5*X2+\dots+4.0*X11<=2.2;$$

もちろん、このままでも良いが、次のように新しい決定変数 CU を導入しても良い。

数理計画法では、伝統的に等号の右に定数項だけを持ってきて、**右辺定数項**という。

$CU=1.4*X1+2.5*X2+\dots+4.0*X11$  なので

$$1.4*X1+2.5*X2+\dots+4.0*X11-CU=0;$$

この場合、上の制約条件は次のようになる。

$$CU>=1.8;$$

$$CU<=2.2;$$

このような定式化でモデルはすっきりするが、決定変数が1個と等式制約が1個増える。

同じようにして、シリコンからマグネシウムまでの制約式を表す。最後にこの会社では、親会社との取引上の関係で、**原材料 X3 を 35% 使用する必要がある。**

$$X3=0.35;$$

以下が、LINGO の自然表記によるモデル化である。LINDO を用いて数理計画法の授業を行う場合、このモデルを学生が作成するだけでも大変であった。企業のユーザーでもモデル作成には相当の時間を費やしていた。これは、モデルと係数を表すデータが独立していないためである。**集合表記**で初めて汎用統計ソフトと同じく、**モデルとデータが独立し、モデルが汎用的に利用できるようになった。** [CU2]等は、制約式につけた制約式名である。

$$MIN=275*X1+275*X2+285*X3+285*X4+185*X5+235*X6+235*X7+260*X8+290*X9+340*X10+255*X11;$$

$$[CU2] 1.4*X1+2.5*X2+2.5*X3+2.5*X4+2.5*X5+2.3*X6+2.5*X7+0.2*X8+98*X9+4*X11-CU=0;$$

$$[SI3] 3.3*X1+8*X2+7.7*X3+9.5*X4+9.3*X5+8.4*X6+9*X7+0.2*X8+97*X10+0.5*X11-SI=0;$$

$$[FE4] 0.7*X1+0.8*X2+0.9*X3+0.9*X4+0.95*X5+0.8*X6+0.9*X7+0.5*X8+0.5*X10+0.5*X11-FE=0;$$

$$[ZN5] 1.5*X1+4.5*X2+0.9*X3+0.9*X4+0.93*X5+3*X6+0.1*X11-ZN=0;$$

$$[MN6] 0.2*X1+0.2*X2+0.18*X3+0.18*X4+0.18*X5+0.21*X6+0.5*X10+0.5*X11-MN=0;$$

$$[MG7] 0.8*X1+0.3*X2+0.19*X3+0.09*X4+0.09*X5+1.4*X6+0.5*X11-MG=0;$$

$$[CU8] CU>1.8;$$

$$[CU9] CU<2.2;$$

$$[SI10] SI>10.8;$$

[SI11]  $SI < 11.2$ ;  
[FE12]  $FE > 0.84$ ;  
[FE13]  $FE < 0.9$ ;  
[ZN14]  $ZN > 1.6$ ;  
[ZN15]  $ZN < 1.8$ ;  
[MN16]  $MN > 0$ ;  
[MN17]  $MN < 0.3$ ;  
[MG18]  $MG > 0.34$ ;  
[MG19]  $MG < 0.35$ ;  
[OTH1]  $X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10 + X11 = 1$ ;  
[OTH2]  $X3 = 0.35$ ;

END

実行すると次の最適解 253.47 が求まる. 減少費用 (Reduced Cost) や省いた双対価格 (Dual Price) の説明は省略する.

**Objective value: 253.4700**

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.6340993E-01	0.000000
X2	0.1371361	0.000000
X3	0.3500000	0.000000
X4	0.000000	190.7464
X5	0.2490194	0.000000
X6	0.1137282	0.000000
X7	0.000000	230.6026
X8	0.4631258E-01	0.000000
X9	0.000000	41633.85
X10	0.4039380E-01	0.000000
X11	0.000000	1557.021
CU	2.200000	0.000000
SI	11.20000	0.000000
FE	0.8400000	0.000000
ZN	1.600000	0.000000
MN	0.1920125	0.000000
MG	0.3400000	0.000000

自然 (スカラー) 表記による LINGO モデルの表記は, 勉強する上で分かりやすい. しかし, 現実の問題に適用しようとする場合, 決定変数や制約式が大きなものも扱う必要が出てくる. そこで, 集合表記のモデルを考えるために Excel に  図 6.4 のデータを準備する. セル

範囲「C2:F2」に最終製品に含まれる 6 成分の含有成分の下限値を LL という配列名, 「C3:F3」に上限値を UL という配列名, 「B3:B15」に原材料の単価, 「C5:H15」の 5 行から 15 行に材料 X1 から X11 に含まれる 6 成分の含有率を示す. これらのデータを Excel から @OLE 関数で入力し, LINGO の配列値として用いる. 最適化で得られる配合比の PRODUCT は, 「J5:J15」に出力される. 紙面の節約のため最適計算の結果を表示してある. I4 には総費用の 214.8 が表示されているが, これは集合モデルの目的関数の MIN 値を表示したのではなく, EXCEL の SUMPRODUCT(B5:B15;I5:I15)で積和を計算して求めた. これは授業で目的関数の式の説明に用いることができる. また「C15:H15」は, SUMPRODUCT(C5:C15;I5:I15)で積和を求めた. このように, 最適化計算を行った結果を Excel で計算すれば, 最適計算の一部の説明ができる<sup>26</sup>.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		含有成分	Cu	Si	Fe	Zn	Mn	Mg	
2		下限	1.8	10.8	0.84	1.6	0	0.34	
3		上限	2.2	11.2	0.9	1.8	0.3	0.35	
4	材料	単価 (円)						総費用	214.8
5	X1	275	1.4	3.3	0.7	1.5	0.2	0.8	0
6	X2	275	2.5	8	0.8	4.5	0.2	0.3	0.107
7	X3	285	2.5	7.7	0.9	0.9	0.18	0.19	0
8	X4	285	2.5	9.5	0.9	0.9	0.18	0.09	0
9	X5	185	2.5	9.3	0.95	0.93	0.18	0.09	0.592
10	X6	235	2.3	8.4	0.8	3	0.21	1.4	0.189
11	X7	235	2.5	9	0.9	0	0	0	0
12	X8	260	0.2	0.2	0.5	0	0.5	0	0.082
13	X9	290	98	0	0	0	0	0	0
14	X10	340	0	97	0.5	0	0	0	0.029
15	X11	255	4	0.5	0.5	0.1	0.5	0.5	0
16		配合割合	2.2	10.8	0.8554	1.6	0.2089	0.35	

図6.4 Excel上のデータ

データを「@OLE」関数でExcelからデータを読み込めば, 毎回操作条件が変わっても Excelデータのみを更新すればよい. 私のような年金生活者でも, 企業の配合問題を簡単にできる<sup>27</sup>. 定年後は, 自分の経験を生かしてコンサルタントを行うのも選択肢の一つである.

SETS:

<sup>26</sup> 東大工学部の院生の卒業研究の相談にのった. 数十年先の各種エネルギー政策を What'sBest! によるシミュレーションで, 数時間計算時間がかかる大規模なものであった. 計算時間のかかる一つの理由として, 最適計算後のグラフ表示を伴う後処理も同じブックで行っていた. LINGO の場合, 最適化計算を LINGO で行い出力する. その後, Excel が後処理を多分短時間で行う. What'sBest! の場合, 同じ BOOK で最適化計算と後処理を作成した場合, 後処理を@OMIT 関数で最適化計算から省かないと最適化計算の一部と考え, 処理時間が遅くなる.

<sup>27</sup> 理系の技術者の中には, 退職後に経済学等のこれまで自分に欠けていた分野の習得を試みる人が少なからずいる. 定年後に新たな勉強することも意味があるが, 自分の経験を生かして LINGO 等を用いたコンサルタントで社会に貢献することも考えられる.

```
CONTENT: UL, LL;
RAW: PRICE, PRODUCT;
MATRIX(RAW, CONTENT):SEIBUN;
```

ENDSETS

DATA:

```
UL=@OLE();
LL=@OLE();
PRICE=@OLE();
SEIBUN=@OLE();
```

ENDDATA

```
MIN=@SUM(RAW(i):PRICE(i)*PRODUCT(i));
@FOR(CONTENT(j): @SUM(RAW(i): SEIBUN(i, j)*PRODUCT(i))<=UL(j));
@FOR(CONTENT(j): @SUM(RAW(i): SEIBUN(i, j)*PRODUCT(i))>=LL(j));
@SUM(RAW(i): PRODUCT(i))=1;
```

#### 6.3.4 ポートフォリオ・モデルとQP

理系の人間がポートフォリオ分析を学習する場合、本格的な解説書を理解しようとする。経済学部やOBにとっては多分難しく理解に苦しむことが多いだろう。いずれにしても、理論をマスターできる人は少数である。実は私も専門書に挑戦したが、すぐにあきらめて、ポートフォリオ分析に関しては、数多くの雛型モデルが提供されているが、一番簡単なもので学習した。別にプロの投資分析家にならないので、それで十分と考える。

図 6.5 が Excel 上のデータである。米国の代表的な情報処理産業 3 社 Google, Yahoo, Cisco (ルーターのトップ企業) の株式の組み入れ比を考える。3 社の利益は 1.3, 1.2, 1.08 とする。年 3 割の利益得られる Google に全額投資することが最善の策であろうか?これを研究したのが、シカゴ大学の経済学部の大学院生のハリー・マックス・マーコウィッツ (Harry Max Markowitz, 1927 年 8 月 24 日 誕生) である。Wikipedia によれば、1955 年にシカゴ大学から Ph.D. を取得、1959 年に『ポートフォリオ選択論』の本を出版し、31 年後の 1990 年にノーベル経済学賞を受賞した。受賞に 31 年かかったのは、彼の研究は実証研究が伴っていない、コンピューターと数理計画法ソフトの発展で、他者が有用性を示したためである。「B4:D6」の値を 3 社の株の値上がり率の分散共分散行列である。これを行列  $V$  とする。「B3:D3」は 3 社の組み入れ比  $(x, y, z)$  である。この組み入れ比は  $x+y+z=1$  とするが、実際の投資額でも構わない。E2 は期待利益で、「 $=B2*X+C2*Y+D2*Z$ 」で計算できる。E4 にはリスクとして「 $= 3*x^2 + 2*y^2+z^2+2*x*y-x*z-0.8*y*z$ 」が入っている。これは、次の行列計算で求まる 3 社に投資した場合の総合化された分散である。t は転置 (Transpose) を表す。分散が上に振れることは投資家には好ましく、下に触れると好ましくない。しかし、振れ幅が上下に大きいと不確実性が増すので好ましくないと考えている。しかし、上上昇するのを無視して、下側に利益が減少する分散をリスクとするモデルもある。

$$\text{リスク} = (x, y, z) * V * {}^t(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= (3x+y-0.5z, x+2y-0.4z, -0.5x-0.4y+z)^t(x, y, z) \\
 &= (3x+y-0.5z)*x+(x+2y-0.4z)*y+(0.5x-0.4y+z)*z \\
 &= 3*x^2 + 2*y^2 \\
 &\quad + z^2 + 2*x*y - x*z - 0.8*y*z
 \end{aligned}$$

そして期待利益は 1.15 以上とする。読者は全額を Google に投資した場合は、利益が 1.3 でリスクが 3 であり、Yahoo に投資した場合は利益が 1.2 でリスクが 2 であり、Cisco に投資した場合は利益が 1.08 でリスクが 1.02 であることを確認しよう。これをプロットしたものを**効率的フロンティア**という。リスクは3社に投資した場合の分散であり、Vの対角要素と一致している。すなわち、Google はハイリスク・ハイリターンであり、Cisco はローリスク・ローリターンである。ポートフォリオ分析が教えることは、ハイリスク・ローリターンがないということである。例えば Google と Yahoo に 50%ずつ投資すれば、利益が 1.25 でリスクが 1.75 である。Yahoo 単独に投資するより、期待利益は 1.25 に増加し、リスクが 1.75 に減少する。

	A	B	C	D	E
1		Google	Yahoo	Cisco	期待利益
2	利益	1.3	1.2	1.08	1.2
3	投資比率	0	1	0	リスク
4	分散共分散	3	1	-0.5	2
5		1	2	-0.4	利益下限
6		-0.5	-0.4	1	1.15
7	投資上限	1	1	1	

図 6.5 3社のポートフォリオ分析

つまり投資分析は、利益はできるだけ多く、リスクはできるだけ少なくという**2目的最適化**であるが誰も納得する最適解はない。この2目的に重みをかけて単一の目的関数にする方法があるが重みの決定が難しい。ソフト・マージン最大化サポート・ベクター・マシン (Soft-Margin SVM) はこれを採用している。一般的には利益を例えば最低限保証したい水準が 1.15 であれば、それを制約式に組み込んだ次のモデルになる。ただこの水準を何段階で替えて効率的フロンティアを描いて、投資家の中から自分の方針に合うものを選ぶことになる。すなわち利益がある水準以上という条件でリスクを最小化する。

$$MIN=3*X*X+2*Y*Y+Z*Z+2*X*Y-X*Z-0.8*Y*Z;$$

$$X+Y+Z=1;$$

$$1.3*X+1.2*Y+1.08*Z>1.15;$$

これを解くと次の解が得られる。Xを約18%、Yを25%、Zを57%の比で投資すれば、リスクが最小化され0.42になる。一般人が投資分析から学ぶことは、昔から知られている「財産3分法」、「一つの籠に卵をもるな」という格言を数理計画法で実証研究できることである。

このモデルは、目的関数が x, y, z の2次関数であり、QPである。これは2次式の最適化で述べたように、制約空間の中で最小値を取り、LPに変換して解かれるので計算速度は

速い。もしリスクを制約式に入れて、利益を目的変数の最大化モデルにすれば、NLP になり計算時間がかかり、得られる解は極大値になる。また得られた極小値は最小値でもある。

### 6.3.5 数独と IP

シュラーズ氏は、数独の愛好家である。それを雛形モデルにしてしまい、愛好家の楽しみを奪ってしまった。これを用いて雑誌の懸賞問題に応募すれば無敵であるが、道義上許されるかどうかの問題がある。あくまで読者は、IP でどこまでできるかの研究課題として扱ってほしい。無償の LINGO の評価版で、IP に指定した変数のサイズが制限を超えるので**包絡線分析**と**数独**だけは実行できない。

数独は、9 行 9 列の升目にある部分に 1 から 9 がたった 1 度しか表われないという制約がある。

- a) 各行,
- b) 各列,
- c) 9個の3x3に分割された升目
- d) 対角要素の升目,
- e) 右上から左下の対角要素の升目

場合によって、(d) と (e) の条件を課さないことがある。次が人の楽しみを奪う LINGO モデルである。簡単なアルゴリズムのポイントをコメント (!... ;) にしてあるので、数独の楽しみの代わりに解説してみよう。

SETS:

DIM;

DD( DIM, DIM): X; !配列Xは数独の9行9列の升目を表す;

DDD( DIM, DIM, DIM): Y; ! 配列Yは制約を満たすkを各升目に設定する場合1になる. ;

ENDSETS

DATA:

DIM = 1..9;

DIAG= 0;! (d) と (e) の条件を課す場合はdiag = 1, 課さない場合は0;

ENDDATA

X(1, 1) = 5; X(2, 6) = 8; X(3, 4) = 5; X(3, 9) = 1; X(4, 2) = 1; X(4, 7) = 6; X(4, 8) = 3; X(9, 1) = 9; X(9, 2) = 8; X(9, 5) = 6;

!数独の問題を指定する;

@for( dd(i, j): X(i, j) = @sum(dim(k): k\*y(i, j, k));

!Xのi行j列をkにする;

@sum(dim(k): y(i, j, k)) = 1;

! i行のj列をkとする場合は1, それ以外の場合は0;

@for(dim(k): @bin(y(i, j, k))); );

!配列Yの要素は0/1の2値のいずれかの整数;

```

@for( dim(j): @for( dim(k): @sum( dim(i): Y(i, j, k)) = 1; ); );
    !配列Yの j 列で, kの値をi=1から9行の1つ箇所に割り当てる;
@for( dim(i): @for( dim(k): @sum( dim(j): Y(i, j, k)) = 1; ); );
    ! 配列Yのi行で, kの値をj=1から9列の1つ箇所に割り当てる;
@for(dim(k): @sum( dd(i, j) | i #le# 3 #and# j #le# 3: y(i, j, k))= 1;
    ! 上段左の3行3列にkの値を一つ割り振る;
@sum(dd(i, j) | i #le# 3 #and# j #gt# 3 #and# j#le# 6:y(i, j, k)) =1;
    ! 上段中央に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #le# 3 #and# j #gt# 6: y(i, j, k)) = 1;
    !上段右に割り振る;
@sum(dd(i, j) | i #gt# 3 #and# i #le# 6 #and# j #le# 3:y(i, j, k))=1;
    ! 中段左に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #gt# 3 #and# i #le# 6 #and# j #gt# 3 #and# j #le# 6: y(i, j, k)) =
1;
    ! 中段中央に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #gt# 3 #and# i #le# 6 #and# j #gt# 6 #and# j #le# 9: y(i, j, k)) =
1;
    ! 中段右に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #gt# 6 #and# i #le# 9 #and# j #gt# 0 #and# j #le# 3: y(i, j, k)) =
1;
    ! 下段左に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #gt# 6 #and# i #le# 9 #and# j #gt# 3 #and# j #le# 6: y(i, j, k)) =
1;
    ! 下段中央に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #gt# 6 #and# i #le# 9 #and# j #gt# 6 #and# j #le# 9: y(i, j, k)) =
1;
    ! 下段右に割り振る;
@sum( dd(i, j) | i #eq# j: diag*y(i, j, k)) = diag;
    !主対角要素にkを割り振る;
@sum( dd(i, j) | i + j #eq# 10: diag*y(i, j, k)) = diag; );
    ! 逆対角要素にkを割り振る;
DATA:
    @OLE ()=x;!答えを配列Xに出力;
ENDDATA

```

以下の図6. 6がDIAG=0の場合の答えである。上が与えられた問題で下が配列Xである。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	5								
3	2						8			
4	3				5					1
5	4		1					6	3	
6	5									
7	6									
8	7									
9	8									
10	9	9	8			6				
11										
12		1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1	5	4	8	1	3	7	9	6	2
14	2	2	9	1	6	4	8	7	5	3
15	3	6	7	3	5	9	2	8	4	1
16	4	7	1	5	8	2	4	6	3	9
17	5	8	3	6	9	1	5	4	2	7
18	6	4	2	9	3	7	6	1	8	5
19	7	3	5	7	4	8	1	2	9	6
20	8	1	6	4	2	5	9	3	7	8
21	9	9	8	2	7	6	3	5	1	4

図 6.6 DIAG=0 の場合の答え

問) 読者は、これまで解けなかった問題等で検証してみよう。

問) Y(i, j, 1)の9行9列の配列を上と同じ形式でExcelに書くと、解法が理解できる。

## 6.4 統計と数理計画法

### 6.4.1 重回帰分析

以下では、主として重回帰分析を数理計画法でモデル化してみる。

#### (1) 最小二乗法

筆者は、第1世代のLINDOの解説書を翻訳した(『実践数理計画法(朝倉)』)。その際、**重回帰分析の最小二乗法**がQPで、**最小絶対値法**(LAV: Least Absolute Value Estimation)による回帰分析がLPで表されることを知った。回帰分析は、yを**目的変数**として**説明変数** $x_1, \dots, x_p$ の線形和で(6.1)でyを予測する。ここでデータとしては、n件の観測値に対して目的変数とp個の説明変数の(p+1)個の変数の値が与えられているとする。

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + \varepsilon \quad (6.1)$$

この時、実際のyの値と**予測値** $\hat{y}$ の間に誤差 $\varepsilon$ が生じる。各々は次の(6.2)のような関係になる。

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p, \quad (6.2)$$

$$y = \hat{y} + \varepsilon, \quad (6.3)$$

$$\varepsilon = y - \hat{y} \quad (6.4)$$

そして、誤差の平方和( $\sum \varepsilon_i^2$ )を最小にする求める方法が、回帰分析で一番用いられる**最小自乗法**である。これは、数理計画法の目的関数として(6.5)で表わされる。 $\varepsilon_i$ は未知数であるので、数理計画法では決定変数である。自乗和の最小化であるので、ポートフォリオ分析と同じくQPで定式化される。

$$\text{MIN} = \sum \varepsilon_i^2 \quad (6.5)$$

制約条件は、n件のデータでn個の(6.6)で表わされる制約式になる。回帰係数( $a, b_1, b_2, \dots, b_p$ )が決定変数になることに注意してほしい。

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_p x_{pi} + \varepsilon_i \quad \text{for } i=1, \dots, n \quad (6.6)$$

数理計画法では、制約式の等号の右辺は定数項のみを記述し、式は等号の左辺に持つていくのが慣習である。そして、p個の説明変数は値が観測されていて、回帰係数( $a, b_1, b_2, \dots, b_p$ )が未知であり決定変数になるという役割の変更が重要である。即ち(p+1)次元の回帰係数の空間で(6.7)の誤差の二乗和を最小にする定数項と回帰係数を求めている。この指摘が判別関数を数理計画法で考える場合に重要になる。

$$a + x_{1i} * b_1 + x_{2i} * b_2 + \dots + x_{pi} * b_p + \varepsilon_i = y_i \quad \text{for } i=1, \dots, n \quad (6.7)$$

次に重要な点は、忙しくて実証研究をしていないが、正規分布を仮定していないので、統計的な最小二乗法の回帰係数と結果は少し異なることである。恐らく最尤推定法の結果に近いであろう。さらに、NLPで最適化を行えば、複数の最適解が得られる場合が出てくる。

## (2)重回帰分析と判別分析の違い

しかし数理計画法では、正規分布を仮定した推測統計学的知見は得られない。このために、回帰分析は数理計画法の研究では取り上げられていないようだ。これに対して、判別分析では判別係数や誤分類確率の標準誤差が統計的に求まらないので、統計を意識し比較する必要がないので多くの研究がある。しかし、筆者は「小標本の100重交差検証法」を開発し、判別係数や誤分類数の95%信頼区間を求めることができた(Shinmura, S., 2015a)。Stam(1997)がアメリカのOR学会誌の総括論文で、140件以上の数理計画法の判別分析の研究を総括したと対照的である。彼の論文の後、急速にOR学会での数理計画法による判別分析の研究は終焉した。一方、Vapnik(1995)は、QPによるサポート・ベクター・マシン(SVM:Support Vector Machin)を統計や数理計画法の学会を避けて、結果が良ければ幅広く受け入れるパターン認識等の学会で彼の理論を普及した。新村は1988年に、先行研究の調査を行わず、MNM基準による改定IP-OLDF(RIP)をIPで求める研究を始めた。そして2016年末に「フィッシャー以後の新しい判別理論」を完成し、応用研究として「癌の遺伝子研究」の結果を合わせてSpringerより出版した。

## (3) LAV (Least Absolute Value) 回帰分析

一方、誤差の絶対値 $|\varepsilon_i|$ の和( $\sum |\varepsilon_i|$ )を最小にする回帰係数( $a, b_1, \dots, b_p$ )をデータから求めるのが誤差の絶対値の和を最小化する(6.8)のLAV (Least Absolute Value) 回帰分析である。

$$\text{Min} = \sum |\varepsilon_i| \quad (6.8)$$

誤差を2つの決定変数 P と N の差として(6.9)のように定義する.

$$\varepsilon_i = P_i - N_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.9)$$

これによって(6.9)を用いて目的関数は(6.10)で表される. この式は間違いのように思われるが  $P_i$  と  $N_i$  は非負の実数であり,  $\varepsilon_i$  が正の時は  $N_i=0$  になり, 負の時は  $P_i=0$  になる数理計画法の特徴を利用している. これによって, LP モデルになる. 制約条件は, (6.7)を修正した (6.7)' になる.

$$\text{Min} = \sum |\varepsilon_i| = P_i + N_i \quad (6.10)$$

$$a + x_{1i} * b_1 + x_{2i} * b_2 + \dots + x_{pi} * b_p + P_i - N_i = y_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.7)'$$

$y_i$  のメディアンを  $m_i$  とすれば, 修正済みの決定係数 R2 は次の(6.11)になるとされている. 決定係数は, 重回帰分析の最初に習う分散分析表で扱う統計量であるが, それほど重要で役に立つ統計量ではない.

$$1 - \{(P_1 + N_1 + \dots + P_n + N_n) / (n - p - 1)\} / \{(|y_1 - m| + \dots + |y_n - m|) / (n - 1)\} \quad (6.11)$$

#### (4) Lp ノルム回帰分析

シュラーズ氏はこの後, 最小最大偏差(LMAX: Least Maximum Deviation)で観測データの誤差の最大値を最小にするモデルを(6.12)のように定式化している. すなわち, 数理計画法では, 個々のデータに対して制約を課すことができる. しかし注意すべきは, このようなモデル化はアイデア次第で数理計画法ではどれだけでも提案できる. 実証研究で既存の手法と比べて, 何が良いのかを示す必要がある. ここで Z は, n 件のデータ全ての偏差の絶対値よりも大きいか等しく, それを最小化している.

$$\text{MIN} = Z; \quad (6.12)$$

$$a + x_{1i} * b_1 + x_{2i} * b_2 + \dots + x_{pi} * b_p + P_i - N_i = y_i \quad (i=1, \dots, n)$$

$$Z - P_i - N_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

ジョン・サール氏(SAS 上級副社長兼 JMP 創業者)は、『SAS による回帰分析の実践、(1986)、朝倉書店』の中で SAS を用いた「重み付き回帰分析とロバストな手法」を用いて, (6.13)のように  $L_p$  回帰分析を誤差の絶対値の p 乗の和で定義している.

$$\text{Min} = \sum |\varepsilon_i|^p = P_i + N_i \quad (6.13)$$

彼は, この回帰分析を SAS の繰り返し重み付き最小二乗法(IRLS: Iteratively Reweighted Least Square)で定式化し, 非線形回帰推定の NLIN プロセジャーで  $p=1.5$  の解を求めている. そして,  $L_{1.5}$  は  $L_2$  即ち最小二乗法と,  $L_1$  すなわち LAV 回帰の中間的な位置づけにあるとしている.

数理計画法で  $L_p$  ノルム回帰分析は, 目的関数を(6.14)のように定式化すればよい. ただし, SAS とアプローチが異なるので解は異なっている. サール氏は自身が開発した JMP でこれに関して言及していないので, あまり使い道がないのかもしれない.

$$\text{Min} = \sum |\varepsilon_i|^p = P_i^p + N_i^p \quad (6.14)$$

#### (5) 秘匿値の推定

秘匿措置とは、ある地域やメッシュ情報で世帯数や人口等の調査対象の数が少ないため、世帯数や世帯所得等の個人的な推測ができてしまうため、一部を 0 やブランクにして推測できなくする措置である。しかし、秘匿値を決定変数にして LP で分かっている関係を定式化することで、簡単に推測できた。これは、EM アルゴリズムでアプローチする論文に用いられたデータでしか行っていないので、必ずできるかは検討していない。

## 6.4.2 判別分析

### (1) フィッシャーの線形判別関数

6.2.1 の(5)で紹介したように、フィッシャーは判別したい 2 群が平均だけ異なる正規分布を仮定して（フィッシャーの仮説）判別分析を提案した。彼は**最尤推定法**も開発していることに注目すべきである。2 群が(6.15)の 1 変数の正規分布と考える。s は分散で、 $m_i$  は平均値とする。

$$N_i(x) = (1/s \cdot \text{SQRT}(2 \cdot \pi)) \cdot e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2 \cdot s^2}} \quad i=1, 2 \quad (6.15)$$

(6.16) のように対数尤度を考えて変換するとフィッシャーの LDF が簡単に得られる。これが正規分布を仮定したおかげである。

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(N_1(x)/N_2(x)) & (6.16) \\ &= \log\{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2 \cdot s^2}} + \frac{(x-m_2)^2}{2 \cdot s^2}\} \\ &= -\frac{(x-m_1)^2}{2 \cdot s^2} + \frac{(x-m_2)^2}{2 \cdot s^2} \\ &= \frac{(m_1-m_2)}{s^2} \cdot x + \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{2 \cdot s^2} \end{aligned}$$

もし  $N_1(x) = N_2(x)$  になる点を判別境界とすると (6.17) になる。

$$\begin{aligned} \frac{(m_1-m_2)}{s^2} \cdot x + \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{2 \cdot s^2} &= 0 & (6.17) \\ x &= \frac{(m_1+m_2)}{2} \end{aligned}$$

すなわち 2 群の平均値の midpoint が判別境界になる。もし  $m_1 = -m_2$  とすれば  $f(x) = 0$  が判別境界になる。このように判別境界が、2 群の平均値の midpoint であることも問題である。判別境界は、医学分野では医学研究で後天的に決まるものである。

2 群の**相関比最大化基準**でフィッシャーの線形判別式が定式化されたという説明は、恐らく後知恵であろう。この場合、偏微分で極大値を求めることになる。与えられたデータから最尤推定法と NLP で求めた LDF は、データが正規分布に従う場合はフィッシャーの線形判別式に収束するが、異なる場合は実証研究で確かめていないが異なってくる。フィッシャーは計算機環境の乏しい時代に、正規分布を考えることで、簡単に説明変数の 1 次式で判別したと考えるのが妥当であろう。

### (2) フィッシャーの後継者の過誤

田邊(2011)は、フィッシャーは棄却の論理的意味は「仮説は真であるがその下で非常にまれな事象が起きたか、あるいは仮説自体が真でないかのどちらかである」とフィッシャー自身が述べていることを指摘している。フィッシャーの仮説を実際のデータが満たすか否かの良い検定法は考えられていない。しかしフィッシャーは彼自身仮説を満たさないデータがあることを明らかに肯定していたことが分かる。

筆者は1971年に大学を卒業し、大阪府立循環器病センターと NEC の「心電図の自動診断システム」の開発プロジェクトに参加した。そこでプロジェクト責任者の野村裕循環器医長から、心電図の正常所見と異常所見を分ける診断論理を当時注目されていた高橋暁正編(1969)を勉強し、LDF と 2 次判別関数 (QDF: Quadratic Discriminant Analysis) を用いて正常と各異常所見群の 2 群判別の研究を 4 年間行ったが野村医師の開発した経験的な「枝分かれ論理」に叶わなかった。当初は自分の統計の知識が未熟と考えたが、すぐにフィッシャーの仮説は医学診断に適していないと考えるようになった。正常と異常所見は、ある計測値が連続的に大きくなることで異常な状態に移行する。異常の典型例は、異常所見群の平均でなく正常より一番離れた状態である。田口が品質管理で正常状態からマハラノビスの汎距離が大きければ大きいほど異常と考えたのと同じである。また判別超平面とその近傍に多くの異常所見がきて、この判別が一番重要になる。正規分布でないので、判別超平面の少しのブレで、誤分類確率が非常に高くなる(新村、2011a)。試験の合否判定を正答得点を説明変数で判別すると、信じられないが 30%近い誤分類確率になる例もすでに紹介している(新村、2011a)。また両群の平均値の真ん中が自動的に判別境界になることを、データで決めることは問題である。判別境界は、固有技術が決めるものである。

試験の合否判定を受験生の得点合計で間違いなく行える。すなわち合否判定データは線形分離可能 (LSD: Linearly Separable Data) であるのに、誤分類確率が 30%近くになる例をすでに示した。以上の経験が MNM 基準による RIP の開発の動機であり、2016 年末に『フィッシャー以後の新しい判別理論(Springer、2016)』を上梓した。

応用研究としてビッグ・データの統計分析として注目を集めたマイクロアレイ・データを用いた「癌の遺伝子解析」が 30 年以上統計的に研究され成果を得ていなかった。米国の著名な 6 研究グループが研究成果を著名ジャーナルに発表し、データを Excel で公開している(Jeffery, et al., 2006)。Golub ハーバード大学医学部教授らは、サイエンスに発表した論文で、真摯に彼らは 30 年以上研究し統計的に良い結果を得られなかったと述べている(Golub et al., 1999)。筆者の開発した最適判別関数だけが、6 種類とも全遺伝子が MNM=0 であり、数十組の数件の遺伝子の組で MNM=0 すなわち数十組の判別関数で正常と癌の判別で LSD すなわち MNM=0 であることを世界で初めて解明した(Shinmura. 2016, Springer)。

さらに、フィッシャーは LDF を後世フィッシャーのアイリスデータと呼ばれるデータで検証している。本データは、実際は Anderson (1945) が集めた実データを用いて検証している。しかし最近ではなくなったが、例えばある手法を開発した場合、実データでなく正規乱数で学習と検証標本を作製して検証することが推奨された。このような検証法では、フィッシャーの仮説を満たすようなデータは誤分類数が少ないので問題点は発見できないのは当然である。またフィッシャーかあるいは同時代の研究者は、もしデータがフィッシャーの仮説を満たさない場合、QDF を勧めるという柔軟な見識を持っていた。

計算機環境が整った今、フィッシャーの遺産を踏まえて、新しい研究にチャレンジすべきであろう。

### (3) 誤分類数と判別係数の関係

判別分析の基本は、分析対象が  $n_1$  件と  $n_2$  件から構成された  $n(=n_1+n_2)$  件の 2 クラス(群)を、 $p$  個の計測値で誤分類数(NM: Number of Misclassification)を最小化する基準で判別する 2 クラスの LDF が基本である。重回帰分析の場合は目的変数の値は、説明変数と同じ連続な数値(連続尺度)である。判別分析では目的変数を病気や正常といった名義尺度や成績の評価の優良可といった順序尺度の場合がある。目的変数の値が 2 値の場合を 2 群判別、3 値以上の場合を多群判別という。また説明変数の線形モデルを考える場合を LDF といい、説明変数の 2 次項までを考えた場合を QDF という。

ここでは 2 群判別の場合の誤分類数を考える。 $f(\mathbf{x})=a_0+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p > 0$  であればクラス 1 (A 群) と考え、 $f(\mathbf{x})=a_0+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p < 0$  であればクラス 2 (B 群) と考える。そして、 $f(x)=0$  を判別境界点といている。このとき、A 群のデータであっても、判別スコアが負になるものが現れる。これは、判別関数で  $f(x) < 0$  となり、B 群に間違われる(誤分類される)データである。A 群のケース数  $n_1$  として、 $f(x) > 0$  になるものが  $n_{11}$  で、 $f(x) < 0$  になるものが  $n_{12}$  とする。一方、B 群で  $f(x) < 0$  と B 群に判別されるものを  $n_{21}$  とし、 $f(x) > 0$  と誤分類されるものを  $n_{22}$  とする。この時、誤分類される  $n_{12}$  と  $n_{22}$  の和を NM と言って、判別関数を評価する代表的な統計量である。判別分析では、種々の統計量が提案されてきた。筆者は、統計手法の中で判別分析の実証研究が一番多い。しかし、利用しているのはほとんど NM であり、推測学的な統計量は使ったことがない。最近では、JMP がフィッシャーの LDF、QDF、そして正則判別関数で、NM と個別のケースの判別スコアに関する情報と、 $n_{11}$ 、 $n_{12}$ 、 $n_{21}$  と  $n_{22}$  を  $2 \times 2$  の分割表にまとめたものしか出力しない。筆者が、判別関数に関する推測統計量をすべて表示しなくなったのは、実証研究で役に立たないと判断したためと考える。

しかし、その頼りにしている NM そのものが大きな問題をはらんでいる。判別分析で一番重要な規則は、 $f(\mathbf{x}) > 0$  であればクラス 1 に判別され、 $f(\mathbf{x}) < 0$  であればクラス 2 に判別されるという基本そのものが間違っている。判別超平面上のケース  $f(\mathbf{x})=0$  がいずれに判別されるかは未解決の問題である(判別分析の問題 1)。 $f(\mathbf{x}) > 0$  であればクラス 1 に判別され、 $f(\mathbf{x}) < 0$  であればクラス 2 に判別され、 $f(\mathbf{x})=0$  がいずれに判別されるかは分からない、が正しい。 $f(\mathbf{x})=0$  に両クラスのケースが来た場合を考えれば、これは明らかである。すなわち、従来の判別関数の NM そのものが正しくない。

### (4) 判別関数の 5 つの問題

筆者は  $p$  次元の判別係数の空間で、与えられた  $n$  個のケース毎の  $p$  変数の計測値を線形超平面の係数と考えて  $n$  個の超平面で分割し、有限個の凸体に分割した。そして、各凸体の内点に対応する判別関数は、同じ  $k$  個のケースを誤分類し、凸体の頂点や辺上には複数のケースがあり、これらをいずれに判別するかは不能であることを世界で初めて示した。そして内点が MNM になる凸体を最適凸体と呼び、これを求める RIP を提案した。すなわち問題 1 に対応できるのは、RIP だけである。

Vapnik は H-SVM で LSD を明確に定義した (問題 2)。RIP も  $MNM=0$  を正しく求めることができるので LSD の判別に対応できる。ロジスティック回帰と改定 LP-OLDF も実証研究では LSD の判別が行える。しかし、分散共分散に基づく判別関数は、たとえ LSD であったも誤分類確率が 3 割近くになる例を示した。医学診断等で、 $NM=0$  でなくても LSD であることになるので、過去の重要な研究を見直す必要がある。

問題 3 は、ある変数が一定値を取る場合に分散共分散行列が計算されないため、一般化逆行列が開発された。フィッシャーの LDF は 2 クラスをプールして共通の分散共分散行列を求めると影響がない。しかし、QDF では 2 クラスの分散共分散が使われる。もし、一つのクラスのある変数が一定値を取り、他のクラスの変数値がばらつくとき、一方のクラスを他方のクラスにすべて誤判別する瑕疵が見つかった。これは現在でも解決されていない。

問題 4 は、判別分析は推測統計学ではないという点である。フィッシャーもその後の後継者も、判別係数や誤分類確率の標準誤差を確率分布から定式化していない。筆者は、与えられた小標本を 100 回コピーして検証標本を作り、それを乱数で並べ替えて 100 組の学習標本を作製し、100 重交差検証法を行った。100 組の学習標本の平均誤分類確率は、変数が増えていくと単調減少し、フルモデルが最小値になる。しかし、検証標本の最小誤分類確率の平均値を Best モデルとすれば、多くの実証データでよいモデルが選ばれた。また、フィッシャーの LDF を除く、3 種の OLDF, 3 種の SVM とロジスティック回帰の 100 個の LDF の係数の中央値は、自明な判別関数になった。

問題 5 は、癌症例と正常症例のマクロアレイ等の遺伝子データで、癌遺伝子を統計的に見つける研究が 30 年以上行われてきたが、成功していない。ここ 10 年、米国の著名な 6 研究グループがこの研究を行い、著名な学術誌に論文を発表するとともに、データを公開している。筆者は、2015 年 10 月 28 日から 12 月 20 日までで、このデータを分析して同じ成果を得た。

- 1) RIP, 改定 LP-OLDF, 改定 IPLP-OLDF, H-SVM と SVM4 (S-SVM でペナルティ  $c=10000$ ) の 6 種のデータの NM は 0 である。しかし、フィッシャーの LDF は 0 でない。ロジスティック回帰は対応していない。
- 2) RIP, 改定 LP-OLDF, 改定 IPLP-OLDF の判別係数の多くは自然に 0 になり、例えば 10 個の判別係数だけが 0 でない。しかし SVM で 0 になるものはほとんどなかった。そこでこの 10 個を遺伝子から省いて判別すると、別の遺伝子の組が求まった。これを繰り返し、最終的に数十組の遺伝子の組 (SM: Small Matryoska) の排他的和集合が見つかった。
- 3) これらの SM は、小標本である。ロジスティック回帰だけが、 $NM=0$  であったので、SM は LSD であることが別手法で確認できた。しかし、フィッシャーの LDF、QDF、PCA、クラスター分析、t 検定で LSD の著効は認められなかった。
- 4) SM の RIP の判別スコアを新しい変数とし、n 件のケースのデータを作成し、PCA やクラスター分析をすると明確に 2 クラスが分離できた。また、-1 以下に正常症例、1 以上の癌症例が SV で判別できる。各 RIP の判別

スコアに対してこの区間 2 の比を RatioSV と定義すると、ほぼ 5%以上から 30%ぐらいの値を取った。例えば、RatioSV が 10%以上の RIP が癌の悪性度指標に使えるのではないかと考えて提案している。しかし、6 グループは、遺伝子名をグループ内で決めた変数名に変換しているので、医学的には彼らしか妥当性を検証できない。

### 6.4.3 数理計画法による判別分析

#### (1) 数理計画法による判別関数の研究

新村は、1998 年に IP を用いた MNM 基準による OLF の研究を始めた。先行研究の文献の掲載が少ない筆者の論文に対し、シュラージ氏が先行研究の一覧リストを送ってきてくれた。その中で一番注目したのが Stam(1997) が米国のオペレーションズ・リサーチ誌で数理計画法を用いた判別関数の研究の総括を行っていた論文である。今回初めて引用文献を調べると 140 以上の文献が載っている。LP で MNM 基準にアプローチしようという文献はあるが無理なことが分かっている。1 件の論文だけが IP で MNM 基準の判別関数を定義しているが、判別係数の範囲に制限を設定していることと、時代背景もあるが実際に実証研究していない。この論文はシュラージ氏のリストにあったので、その問題点を Springer の書籍で説明している。この研究の後、オペレーションズ・リサーチの研究分野では、数理計画法による判別研究は終焉したようだ。

これと並行して、Vapnik(1995)に SVM を数理計画法や統計の分野でなく、パターン認識等の工学分野で SVM を発展させたのは賢明である。統計分野で判別分析の一種という位置づけで行えば、筆者が経験しているが確率分布を前提にしていなくて大きな抵抗があったであろう。

一方、新村(1999)は 1998 年から IP を用いた MNM 基準による IP-OLF の研究をはじめ、最初に問題 1 を解決した。

#### (2) SVM の QP による定式化

SVM は SV 間の距離の最大化基準をとっていて、LSD の判別を初めて明確に定義した。もし正常症例と癌症例が LSD である場合、 $f(\mathbf{x}) \leq -1$  以下に正常症例、 $f(\mathbf{x}) \geq 1$  以上に癌症例を判別できる。 $f(\mathbf{x}_i) = -1$  と  $f(\mathbf{x}_j) = 1$  とする判別超平面をサポートベクター (SV: Support Vector) という。従来は、 $f(\mathbf{x}) = 0$  を判別境界とし、 $f(\mathbf{x}) > 0$  であれば癌症例、 $f(\mathbf{x}) < 0$  であれば正常症例とすれば良いが、実際には等号を勝手にクラス 1 かクラス 2 に含めていた。また、 $f(\mathbf{x}) = 0$  ではゼロの判定がソフトウェアで異なる。LINGO では絶対値が  $10^{-8}$  以下の場合をゼロと判定しているが、ソフトウェアによって異なっている。それに対して LSD の判別で SV で 2 クラスが完全に分けられることを示した (6.18) のハードマージン最大化 SVM (H-SVM) の優れた点である。そして、2 つの SV 間の距離を最大化した LDF は、考えている  $k$  次元のモデルの中で汎化能力 (Generalization Ability) が優れていると主張した。さらに  $f(\mathbf{x}) \leq -1$  以下に正常症例、 $f(\mathbf{x}) \geq 1$  以上に癌症例としたが、これはデータが決めることであり、場合によって逆になるかもしれない。そこでクラス 1 を表す目的関数を  $y_i = -1$ 、クラス 2 を  $y_i = 1$  とすることで、データによらないで「 $\mathbf{y}_i \times (\mathbf{x}_i \mathbf{b} + \mathbf{b}_0)$

$y_i \geq 1$  ;」で正しく判別されたという制約式が分かり易くなる。しかし、LSD でないデータにこのモデルを適用するとエラーになるので、この H-SVM を用いた LSD 判別の研究はないように思う。

$$\text{MIN} = \|\mathbf{b}\|^2/2; \quad y_i \times (\mathbf{x}_i \mathbf{b} + b_0) \geq 1; \quad (6.18)$$

しかし現実のデータはLSDでないことが多い。そこで、判別超平面で誤判別されることを許し、その距離の和を最小化する2目的最適化を考えることで、オーバーラップしているデータを扱えるようにした。(6.19)に示すようにペナルティ  $c$  という重みで2目的最適化を単目的化している。

$$\begin{aligned} \text{MIN} &= \|\mathbf{b}\|^2/2 + c \times \sum e_i; \\ y_i \times (\mathbf{x}_i \mathbf{b} + b_0) &\geq 1 - e_i \end{aligned} \quad (6.19)$$

$c$ : penalty  $c$  for combining two objectives.  $e_i$ : non-negative value.

この後、カーネルSVMを定義している。SVMの研究は、Stamが評価した多くの数理計画法による判別研究が実証研究していないのに対し、多くの実証研究がある点である。残念なことに、他の判別手法との比較は少ないようだ。

### (3)最適線形判別関数

次の3件の2変数のデータ  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  の判別を考える。

$$\text{Class 1: } \mathbf{x}_1 = (-1/18, -1/12)$$

$$\text{Class 2: } \mathbf{x}_2 = (-1, 1/2), \quad \mathbf{x}_3 = (1/9, -1/3).$$

**MNM 基準**による IP-OLDF を(6.20)で定式化した。この式は判別係数の定数項を1に固定することで、2次元の判別係数の空間でMNMを求める判別係数  $(b_1, b_2)$  を見つける。 $e_i$  は0/1の整数変数で、 $M$  は10000に設定したBigM定数である。判別関数の定数項は1に固定してある。 $e_i=0$  の場合、ケース  $\mathbf{x}_i$  は正しく判別される。 $e_i=1$  の場合、ケース  $\mathbf{x}_i$  は誤判別される。

$$\begin{aligned} \text{MIN} &= \sum e_i; \\ y_i \times (\mathbf{x}_i \mathbf{b} + 1) &\geq 1 - M \times e_i; \end{aligned} \quad (6.20)$$

これを具体的に3件のデータで表すと(6.21)のようになる。

$$\begin{aligned} \text{MIN} &= \sum e_i; \\ y_1 * \{-(1/18) * b_1 - (1/12) * b_2 + 1\} &\geq -e_1; \\ y_2 * \{-b_1 + (1/2) * b_2 + 1\} &\geq -e_2; \\ y_3 * \{(1/9) * b_1 - (1/3) * b_2 + 1\} &\geq -e_3; \end{aligned} \quad (6.21)$$

判別スコアを0とすることで、判別係数の空間を(6.22)の3つの線形超平面で判別スコア

がプラスとマイナスになる半平面に分割する。

$$H_1 = y_1 * \{-(1/18) * b_1 - (1/12) * b_2 + 1\} = 0, \quad (6.22)$$

$$H_2 = y_2 * \{-b_1 + (1/2) * b_2 + 1\} = 0,$$

$$H_3 = y_3 * \{(1/9) * b_1 - (1/3) * b_2 + 1\} = 0$$

図 6.7 は、7 個の凸体に分割されたことを示す。3 個の超平面を  $H_1, H_2, H_3$  で示す。その両側の+と-はその半平面の点を判別係数として選ぶと+の場合は  $x_i$  を正しき判別し、-の場合は誤判別する。凸体の中の数字は MNM の値であり、MNM=0 の三角形の中の内点を判別係数とするすべての判別関数は LSD であることを示す。すべての凸体の内点は示された数字の個数だけ同じケースを誤判別する。一方、凸体の頂点と変に対応する判別関数は、判別境界上にケースが来て、これを正しく判別できないことが分かる。

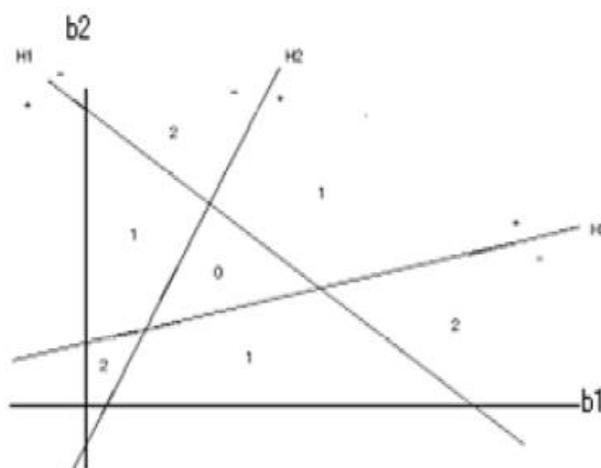


図 6.7 7 個の凸体

しかし IP-OLDF はデータが一般位置にある場合、正しい最適凸体の頂点の一つを選ぶ。一般位置にない場合、正しい最適凸体の頂点を選ばないことが分かった。そこで定数項を自由変数にして最適凸体の内点を直接求める (6.23) の RIP を開発した。

$$\text{MIN} = \sum e_i; y_i \times (x_i b + b_0) \geq 1 - M \times e_i; \quad (6.23)$$

$b_0$ : free decision variable.  $e_i$ : 0/1 integer variable

#### (4) 30 年以上成功しなかったがんの遺伝子解析(問題 5)

2015 年 10 月 25 日に富山市で開催された統計のシンポジウムで、判別分析の最後の問題 4 を解決した研究報告をした。翌 26 日に、米国の 6 研究グループが公表している

Microarray データを使って PCA で分析した研究発表があった。そして、30 年以上解決されていない判別関数の問題 5 があることを思い出した。2010 年に日科技連から『最適線形判別関数』を出した後、このテーマも考えたがデータの入手方法が分からず「試験の可否判定データ等を用いた、LSD 判別」を選んでしまった。28 日にデータが掲載されている URL を発表者からもらいダウンロードして RIP で判別して驚いた。計算時間がかかると思っていたが、数分で  $MNM=0$  で判別できた。H-SVM でも  $NM=0$  になる。ところが RIP の Excel に出した判別係数が 0 である。スクロールしていくと、稀に 0 でないものがある。暫くしてこの分野の研究者が Feature Selection (すなわち変数選択) 手法を色々開発しているが、変数選択を行わず自然に例えば 10 個程度の遺伝子で  $MNM=0$  になる癌遺伝子の候補を見つけることができた。統計的には、 $MNM=0$  になる部分空間を **SM (Small Matryoshka)** と呼ぶことにした。1 万次元の大きな Matryoshka に 9999 次元から 10 次元までの SM が含まれている。しかし、RIP ではその中にさらに最小次元の癌の**基本遺伝子 (BGS: Basic Gene Set)** が含まれている。BGS から任意の 1 個の遺伝子を省くともう  $MNM=0$  でないので、統計的に癌遺伝子の候補と考えた。医学的にこれらの遺伝子が癌と関係していることの検証が必要になる。さらにこの 10 個の遺伝子を 1 万個から省いて、残りの 9,990 個の遺伝子进行分析するとまた別の例えば 20 個の SM2 が求まる。 $MNM=0$  である限り、これを繰り返して例えば 60 組の SM を求めた。

各 RIP の判別スコアの範囲に対して、2 つの SV の区間 2 の比を RatioSV として求めると 30% から 5% の大きな窓が開いていることが分かった。例えば 10% 以上の大きな窓の空いた SM の RIP は、癌の悪性度指標と考えられる。

しかし残念なことに、公開されているデータの遺伝子名は他の変数名に置き換えられているので、これを医学的に評価できるのは各研究グループのメンバーだけである。30 年以上成功しなかったが、彼らがマイクロアッセイ・データを集めて、統計的に癌の遺伝子を特定しようと試みたアプローチは間違っていない。しかし、正規分布を仮定した分散共分散行列を基礎に置く判別関数は、LSD を正しく  $MNM=0$  で判別できない。H-SVM は  $MNM=0$  で判別できるが、判別係数が自然に 0 にならないので、癌遺伝子の小さな部分空間である SM を見つけることができない。彼らが、統計を信じたばかりに良い結果が出なかったのは、不運としか言いようがない。おそらくこのテーマを研究課題にしておらなければ、他の分野で大きな業績が上げられた逸材の集まりだったと考える。

RIP で簡単にできたのは、IP のアルゴリズムの分子限定法が部分空間の最適解を見つけることができるからである。

## 6.5 雑型モデルで何ができるのか

シュラージ元教授は、178 冊に及ぶ論文や書籍を調べて、それを誰もが理解でき実践できる「**雑形モデル**」にまとめている。彼は、使いやすく高機能な LINGO, Excel のアドインの

What'sBest!と最適化 C ライブラリーの LINDO/API という実際に応用問題を解決するソルバーも提供している. 筆者は兼ねてより「使いやすく高機能な統計ソフトがあればデータで表される問題を, 数理計画法のソルバーは数式で表される問題が容易に解決できる」と主張してきた. 彼の本から, 回帰分析や判別分析が数理計画法で定式化できることを知り, 「新しい判別理論と遺伝子解析」に世界で初めて成功した. そして, 文献調査をあまりせず, DEA の雛型モデルで学部学生も容易に各種組織の抱える問題を発見し, 解決策をゼミで行ってきた. 大学生, ビジネスマン, 研究者は, シュラージ氏の開発した雛型モデルを調べ, 実際に自分の問題解決を試みることを勧める. また, 評価版も無償提供している.

彼の知恵を紹介するために「L. Schrage 教授の英知で学ぶビジネスと研究に役立つ問題解決学(上中下巻)」の出版を準備している.

#### 上巻

1 章と 2 章では, 数理計画法の基本を製品混合問題で説明し, 感度分析で減少費用および双対価格, 解の状態分けと非線形モデルと大域的最適解を説明. 2 章では, LINGO による問題解決と IP の注意. 3 章では, 双対 LP 問題あるいは土地の貸し手と借りて等. 4 章では, モデルの定式化の一般論と雛型モデルの効用を, 製品混合問題, カバーリング, 人員配置, 分割問題, 配合問題, 多期計画問題, ネットワーク, 分配, PERT/CPM モデル, ランダムな要素を含んだ多期計画問題, ポートフォリオ・モデル, ゲーム理論. 5 章では, 便利な集合の利用, 6 章以降は実問題に適用できる応用問題である. 6 章の製品混合問題. 7 章は, 被覆・人員配置・分割問題で, 製鉄における分割問題, 飛行機の乗員のスケジューリング問題, 一般的なカバーリング/分割/梱包モデル. 8 章では, ネットワーク・配送・PERT/CPM でプロジェクトのクラッシング(短縮), 方向性のないネットワークでは Multicommodity ネットワーク・フローやスパニングツリー. 9 章は, 多期間計画問題. 中巻では, 10 章で配合問題, 11 章は IP の定式化と解法でネットワーク型 LP 再考, 巡回セールスマン問題, 容量のある多数 TSP/車両旅程問題, 最小スパニング樹等. 下巻では, 不確実あるいは確立要素のある多期間決定問題. 13 章はポート・フォーリオ最適化. 14 章は多基準とゴールプログラミング. 15 章は経済均衡問題. 16 章はゲーム理論. 17 章は在庫・生産およびサプライチェーンマネジメント. 18 章はサービスと待ち行列のデザイン&システム実装. 19 章は DSS の最適化のデザインと実装, を予定している.

### 参考文献

- [1] Anderson, E. (1945). The irises of the Gaspé Peninsula, *Bull Am Iris Soc* 59.2-5.
- [2] Charnes, A. Cooper W. W. and Rhodes, E. (1978), "Measuring Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research*, 2 429-444.
- [3] A. Charnes, W. W. Cooper, A. Y. Lewin and L. M. Seiford, *Data Envelopment Analysis, Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1994. 刀根薫, 上田徹 監訳, 『経営効率評価ハンドブック』, 朝倉書店, 2000.
- [4] Cox, D.R. (1966). Some procedures connected with the logistic qualitative response curve, *Research papers in statistics: Essays in honour of J. Neyman's 70<sup>th</sup> birthday* (ed. by F.N. Cavid), Wiley (London).
- [5] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates, *Biometrika*, vol. 80: 27-39.
- [6] Fisher, R. A. (1956). *Statistical methods and statistical inference*. Hafner Publishing Co.
- [7] Flury, B. and Rieduyll, H. (1988). *Multivariate Statistics: A Practical Approach*, Cambridge University Press.
- [8] Golub, T.R. et al. (1999). Molecular Classification of Cancer: Class Discovery and Class Prediction by Gene Expression Monitoring, *Science*, 1999 Oct 15, 286(5439), 531-537.
- [9] Jeffery, IB. Higgins, DG. Culhane, AC. (2006). Comparison and evaluation of methods for generating differentially expressed gene lists from microarray data, *BMC Bioinformatics*. Jul 26; pp. 7:359. <http://www.bioinf.ucd.ie/people/ian/>
- [10] Sall, J. P., Creighton, L., Lehman, A. (2004). *JMPを用いた統計およびデータ分析入門 (第3版)*. SAS Institute Japan (株). [新村秀一監修].
- [11] Schrage, L. (2006). *Optimization Modeling with LINGO*. LINDO Systems Inc. (Shinmura, S. translated Japanese version)
- [12] Shinmura, S. (2012). Relationship between the DEA cluster and the lower limit of weights. *Proceedings of DEA Symposium 2012*, 63-68.
- [13] Shinmura, S. (2015a). The 95% confidence intervals of error rates and discriminant coefficients, *Statistics, Optimization and Information Computing*, vol. 3, 66-78.
- [14] Shinmura, S. (2015b). Four Serious problems and New Facts of the Discriminant Analysis, E. Pinson et al. (Eds.) *ICORES 2014 Revised and Selected Papers*, CCIS 509, 15-30, Springer. ISSN: 1865-0929, ISBN: 978-3-319-17508-9, DOI: 10.1007/978-3-319-17509-6.
- [15] Shinmura, S. (2015c). A Trivial Linear Discriminant Function, *Statistics, Optimization,*

- and Information Computing, Vol.3, December 2015, 322-335. DOI: 10.19139/soic.20151202.
- [16] Shinmura, S. (2015d). The Discrimination of the microarray data (Ver. 1), Research Gate (1), Oct. 28, 2015, 1-4.
- [17] Shinmura, S. (2016a). Matroska Feature Selection Method for Microarray Data. Biotechno 2016, 1-6.
- [18] Shinmura, S. (2016b). The New Theory of Discriminant Analysis after R Fisher, Springer. DOI: 10.1007/978-981-10-2164-0
- [19] Shinmura, S. (2017). From Cancer Gene Analysis to Cancer Gene Diagnosis. Amazon, Kindle.
- [20] Stam, A. (1997). Nontraditional approaches to statistical classification: Some perspectives on  $L_p$ -norm methods. Annals of Operations Research.
- [21] Simon N, Friedman J, Hastie T, Tibshirani R (2013). A sparse-group lasso. J. Comput. Graph. Statist, 22:231-245.
- [22] Ueda, T. (2007). Application of Multivariate analysis for DEA. Proceedings of DEA Symposium 2007, pp.96-101.
- [23] Vapnik, V. (1995). The Nature of Statistical Learning Theory. Springer-Verlag.
- [24] Walker, S.H. and Duncun, D.B. (1967). Estimation of the probability of an event as a function of several independent variables, Biometrika, 54, 167-179.
- [25] 石井 晶(2015). First principal component and its applications to tests of means and covariance matrices for high-dimensional data. 多様な分野における統計学の展開. 1-10.
- [26] 伊東彰宏(2009). DEA による空港経営の効率性評価, 北海学園大学論文報告集66号: 部門D.
- [27] 黒岩亜紀江, 新村秀一 (2012). 日本計算機統計学会, 第 26 回シンポジウム 2012IASC-ARS セッション 併催 講演者論文集, 71-74.
- [28] 新村秀一 (1984). 医療データ解析, モデル主義そして OR. オペレーションズ・リサーチ, 29/7, 415-421.
- [29] 新村秀一 (1986). SAS による回帰分析の実践. 朝倉書店.
- [30] 新村秀一 (1989). GINO によるモデリングと最適化—汎用数値計算プログラム—. 共立出版.
- [31] 新村秀一 (1992). 実践数理計画法—LINDO を用いて—. 朝倉書店.
- [32] 新村秀一 (2004). JMP 活用 統計学とっておき勉強法. 講談社.
- [33] 新村秀一(2007). Excel と LINGO で学ぶ数理計画法. 日科技連出版.

新村秀一(2017). DEA による問題の発見と解決

- [34] 新村秀一 (2010). 最適線形判別関数. 日科技連出版.
- [35] 新村秀一(2011a). 合否判定データによる判別分析の問題点. 応用統計学, 40/3, 157-172.
- [36] 新村秀一(2011b). 数理計画法による問題解決法. 日科技連出版.
- [37] 新村秀一(2012). SAS/JMP との歩み. STN(SAS Technical News) 春号～冬号.
- [38] 新村秀一 (2015). 判別分析の誤分類確率と判別係数の 95%信頼区間. 多様な分野における統計学の  
新展開 (富山県民会館). 1-10.
- [39] 杉山学(2010). 経営効率分析のための DEA と Inverted DEA - 基本概念と方法論から, 主観的な判断を  
加味できる応用モデルまで -. 静岡学術出版
- [40] 高橋暁正編(1969). 計量診断学. 東京大学出版会.
- [41] 竹内啓(20011). 書評:小西定則「多変量解析入門—線形から非線形へ—」, 新村秀一「最適線形判別関  
数」. 統計, 71-74.
- [42] 田邊國士 (2011). 応用数理の遊歩道 (67) 帰納という原罪. 応用数理, 304-309.
- [43] 刀根薫(1993). 経営効率性の測定と改善 - 抱絡分析法 DEA による-. 日科技連出版社.
- [44] 山田善治靖, 松井知己, 杉山学(1994). DEA モデルに基づく新たな経営効率性分析法の提案. Journal  
of the Operations Research Society of Japan, 7, 158-168.
- [45] プリチャード真理, 江口真須透(2009). 関連遺伝子セットの多重解の存在. 日本統計学会誌,
- [46] 三宅章彦, 新村秀一 (1980). 最適線形判別関数のアルゴリズムとその応用, 『医用電子と生体工学』,  
18/6, 452-454.
- [47] 池田が参考にした HP  
国土交通省航空局監修:「航空需要予測」,  
[http://www.mlit.go.jp/koku/02\\_topics/01\\_juyou/index.html](http://www.mlit.go.jp/koku/02_topics/01_juyou/index.html)  
国土交通省監修:「平成18年度空港別収支の試算結果について」,  
[http://www.mlit.go.jp/koku/15\\_bf\\_000181.html](http://www.mlit.go.jp/koku/15_bf_000181.html)  
国土交通省監修:「年度別空港管理状況」,  
<http://www.mlit.go.jp/common/000030477.pdf>  
国土交通省監修:「全国空港配置図」,  
[http://www.mlit.go.jp/koku/15\\_bf\\_000310.html](http://www.mlit.go.jp/koku/15_bf_000310.html)